ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE UM ITEM DE UMA PROVA DE UM CURSO DE ENGENHARIA

Laís Dri da Rosa[1], Guilherme Gasparini Lovatto[2], Diovanna Bortoletto[3], Andréia Büttner Ciani[4], Edevaldo das Neves Marques[5]

[1]Acadêmica do Curso de Matemática (licenciatura), Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE. laisdridarosa@hotmail.com
[2]Acadêmica do Curso de Matemática (licenciatura), Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE. guigasparinilovatto@hotmail.com
[3]Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM, Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE. Diovannabortoletto10@gmail.com
[4]Professora, Doutora, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET, Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE. andbciani@gmail.com
[5]Aluno do curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE. edevalneves@hotmail.com

RESUMO

O artigo se propõe a analisar as produções escritas de 42 alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de Engenharia em uma questão. O objetivo é identificar a maneira que este grupo de alunos ingressantes em um curso de Ciências Exatas na universidade lidam com o cálculo do valor numérico de uma função regida por duas leis. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo pautada nas premissas da Análise de Conteúdo. A fundamentação teórica se pauta na produção científica referente à Avaliação da Aprendizagem em Matemática, que considera a análise da produção escrita como um caminho para se efetivar a avaliação da aprendizagem em Matemática. As produções escritas dos estudantes foram analisadas e houve identificação de quais conhecimentos eles utilizaram em suas resoluções e de que forma os utilizaram, por meio da descrição, interpretação, identificação e agrupamento das semelhanças entre as resoluções. O resultado apontou para a identificação de quatro categorias. Estas apontaram que os estudantes utilizaram de maneira correta a definição e o domínio de função, em sua maioria. Os erros apontaram para a utilização de uma estratégia que pode ter sido aprendida no Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; Análise de Conteúdo; Avaliação de Aprendizagem; Análise da Produção Escrita.

1 INTRODUÇÃO

Aprender e ensinar matemática pode ser uma tarefa árdua em qualquer nível de ensino, seja escolar ou acadêmico. Há décadas, a Educação Matemática vem se debruçando a compreender os elementos que sustentam as rotinas de fracasso no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

As pesquisas no ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior são mais recentes. Dentre as disciplinas de matemática no Ensino Superior, o curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) parece ser o mais temido e causa grande preocupação tanto para os docentes quanto para os estudantes. Porém, esse não é um problema tão recente, uma vez que “por volta de 1750, o próprio matemático Euler demonstrou uma preocupação com a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, quando escreveu um texto de “pré-cálculo”, enfatizando a ideia de função”. (BELINGOFF; GOUVÊA, 2008, apud ALVARENGA; DORR; VIEIRA, 2016). Isso revela que, desde aquela época, já havia uma preocupação com a preparação dos alunos que enfrentariam esta disciplina, o que sinaliza para as dificuldades de se ensinar e aprender CDI.

Mais recentemente, trabalhos como o de Trevisan e Mendes (2018) vêm defendendo a organização de ambientes de ensino e aprendizagem pautados em resolução de tarefas para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Engenharia. Apontam algumas características que os estudantes apresentam ao adentrarem no Ensino Superior, dentre estas: falta de experiências com tarefas de caráter investigativo; concepções equivocadas acerca de alguns conceitos matemáticos;

hábito de trabalhar individualmente, apresentando dificuldade em expor e discutir suas ideias. Consideram os elementos: o contexto real do trabalho, o perfil dos estudantes, a organização dos conteúdos e as tarefas que compõem o ambiente.

De maneira semelhante, Mendes e Buriasco (2018) apresentam que uma atividade avaliativa deve proporcionar que o estudante desenvolva estratégias e procedimentos em amplitude e profundidade, não deixando de lado as notas de conceitos, mas olhar para cada estudante a partir de seu desenvolvimento, sem comparações externas, seja ela, em relação aos colegas ou ao modelo idealizado. Neste caso trata-se da prova em fases, que é uma prova individual realizada em sala, a qual apresenta questões referentes aos conteúdos de um determinado período no qual os estudantes têm acesso a todas as questões em todas as fases, podendo escolher quais resolver em cada fase.

Ambos os trabalhos mencionados a cima, utilizaram a análise da produção escrita para dar retorno, ou *feedbacks,* em tempo real para os estudantes a fim de auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de CDI. Neste artigo, se propõe que ao utilizar a análise da produção escrita na prova de CDI permita identificar os conhecimentos que os estudantes trazem do Ensino Médio e de que maneiras demonstram relacionar o conteúdo aprendido no Ensino Superior com os conhecimentos prévios do Ensino Médio.

Sendo assim, neste trabalho buscou-se, por meio da análise de conteúdo de Bardin (1977), analisar a produção escrita de alunos ingressantes, em uma prova de CDI, de um curso superior de uma universidade pública, na área de engenharia agrícola. *A priori*, entende-se que os alunos ingressantes na universidade trazem de sua vida escolar uma grande defasagem no aprendizado dos conteúdos matemáticos. Assim, por falta de domínio de conteúdos básicos matemáticos por parte do estudante, muitas vezes, o curso de CDI é o grande "vilão" podendo ser o motivo da desistência de estudantes do curso superior ao qual é um requisito.

Como este trabalho tem por princípio analisar a produção escrita em uma prova de CDI, deve-se considerar que o momento de uma prova ou teste sempre vem envolto de uma certa tensão. Isso pode ocorrer em qualquer área do conhecimento, seja para a retirada de uma carteira de motorista, ou até mesmo uma avaliação médica. Porém, o ambiente escolar, ou acadêmico, é aquele no qual a ideia de avaliação mais gera tensões, talvez isso ocorra devido à falta de clareza quanto à função de uma avaliação, seja por parte do docente ou por parte do estudante. Entretanto, há de se perceber que, num contexto escolar, a avaliação deve se prestar à aprendizagem e não à seleção ou classificação. Por isso que, neste trabalho, aborda-se a perspectiva de uma avaliação para a aprendizagem.

Sobre avaliação, Hadji (1994) expressa que a avaliação emerge a partir de três palavras chaves que são: verificar, situar e julgar. Também, diferencia a noção quantitativa e qualitativa, além de trazer o questionamento "Não significa isto que a operação de avaliação é fundamentalmente multidimensional e envolve um trabalho que se desdobra em múltiplos registos e em diferentes campos?"

> Avaliar, segundo este ponto de vista, significa tentar estabelecer elos, pontes, entre diferentes níveis de realidade, sempre a marcar e a sublinhar por esta mesma operação a distância que os separa: a realidade daquele que constrói e formula o juízo de valor, e a daquilo em que incide esse juízo, ainda que se trate da mesma pessoa, num ato de autoavaliação. (HADJI, 1994, p. 29).

Na perspectiva de Charles Hadji é possível perceber que avaliar não é somente olhar como certo ou errado, mas ter uma visão mais ampla das resoluções além da esperada, observando as diversas formas de resoluções, identificando dificuldades, conceitos mal compreendidos, sem comparações entre os indivíduos, utilizando desta ferramenta não para a classificação e sim para contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Desse modo, sob a luz da avaliação da aprendizagem, almeja-se analisar a produção escrita, dos alunos, em uma questão envolvendo funções. Tal exercício, apresenta restrições e duas leis de formação. Em relação a análise da produção escrita pode dizer que está centrada na análise de conteúdos de Bardin (1977). Esta autora descreve análise de conteúdo como sendo

> [...] um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da Análise de Conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção. Esta forma de análise leva o pesquisador, depois de muito estudo, a criar categorias, agrupando unidades de análise semelhantes, fazendo inferências sempre que necessário e possível. (BARDIN, 1977, p. 26 apud SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p. 109).

As pesquisas no campo da avaliação escolar são recentes. Um dos precursores desses estudos, no Brasil, é Heraldo Vianna. Vianna (1989) apontou que é preciso um olhar criterioso para determinados instrumentos de avaliação, pois, dependendo de como são utilizados dificultam a interpretação dos desempenhos, podendo levar a falsas conclusões, se considerar escores apenas, sem a análise do desempenho em itens isolados ou em certos tipos de problemas que podem fornecer mais informações.

O GEPEMA[1] liderado por Regina Luzia Corio de Buriasco, vem pesquisando e apresentando muitos resultados com base na análise da produção escrita. Proporcionando aos professores um olhar para a avaliação escolar como uma prática de investigação.

Por meio desses estudos pode-se observar a necessidade da análise da produção escrita dos estudantes para contribuir com o processo ensino e aprendizagem, para que o professor conduza seu trabalho de forma que possa tomar conhecimento do que os alunos demonstram saber. A partir disso, fornecer *feedbacks* fidedignos a eles sobre o seu processo de aprendizagem, além de apenas considerar uma resposta como totalmente certa ou errada. De acordo com Dalto e Buriasco (2009, p. 452) o professor, neste caso, estaria

> [...] perdendo uma oportunidade de verificar os conhecimentos que ele já elaborou e aqueles que estão em processo de elaboração, assim como os erros cometidos pelos estudantes, que podem fornecer importantes informações sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Nagy-Silva e Buriasco (2005) centralizam suas análises na observação de aspectos essenciais e específicos para cada situação, como por exemplo: os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução, quais os conhecimentos matemáticos foram utilizados, erros e suas possíveis naturezas, utilização de informação contidas no enunciado, entre outras.

As pesquisas sobre análise do erro em cálculo diferencial e integral tiveram início com Helena Noronha Cury. Ela realizou diversas investigações sobre os erros cometidos por estudantes, executando um levantamento detalhado e buscou compreender suas causas. Cury (2005) relata em seus trabalhos o chamado “erro resistente”, o qual é caracterizado por ser encontrado em diversas situações. Caracteriza os estudantes principalmente ativos, sensoriais, visuais e sequenciais, e que estes ao ingressarem na

[1] Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação da Universidade Estadual de Londrina.

universidade não possuem um conhecimento necessário da matemática básica, não conseguem formular questionamentos acerca de suas dúvidas e até argumentar sobre as resoluções.

Conforme apresentado, levaremos em conta a maneira de se trabalhar com a produção escrita em provas de Cálculo, um olhar para a maneira que os estudantes demonstram revelar seus conhecimentos em suas produções escritas sem adentrar na dicotomia do certo e errado. Desta maneira, elencamos a descrição de cada resolução, que diante de uma leitura flutuante (BARDIN, 1977) interpretativa, estas descrições serão agrupadas, realizadas inferências e estabelecidos os primeiros grupos. Num segundo momento, passamos a interpretar as resoluções e identificar semelhanças entre elas.

2 UMA BREVE ABORDAGEM SOBRE FUNÇÃO

O conceito de função, objeto de estudo do curso de Cálculo, é um dos mais importantes da matemática, muitos matemáticos tiveram grande importância no desenvolvimento desse conceito para que se tornasse o qual estudamos hoje.

Somente em 1673, Leibniz traz o termo *função* em seu trabalho intitulado “Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus”, ainda que não o utiliza para designar a relação como conhecemos, mas já apresenta a ideia geral do conceito de função. Ele também foi o primeiro a utilizar os termos *constante*, *variável* e *parâmetro*.

Em 1718, Johann Bernoulli publicou um artigo onde apresentava sua definição de uma função de uma variável como uma quantidade, sendo composta de alguma forma a partir dessa variável e constantes, mais tarde Euler, que foi aluno de Bernoulli, acrescentou essa definição utilizando expressão analítica no lugar de quantidade. Euler, também definiu as noções iniciais que diferenciam as funções contínuas das descontínuas e criou diversas definições, iniciou o uso da notação $f(x)$ para uma função em x e, em sua época, já utilizava em seus trabalhos notações que ainda hoje são adotadas.

Youschkevitch (1981) trata o desenvolvimento da noção de função com três etapas principais: a Antiguidade, a Idade Média e o período moderno.

> A Antiguidade: etapa no curso da qual o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.
> A Idade Média: Nesta etapa, estas noções são pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, de preferência a uma fórmula.
> O período moderno: no curso do qual, a partir do fim do século XVII, as expressões analíticas de funções começam a prevalecer; a classe das funções analíticas geralmente são expressas por meio de soma de séries finitas, tornando-se logo a principal classe utilizada. (YOUSCHKEVITCH, 1981)

Youschkevitch (1981), Ponte (1992) e Alvarenga et al (2014) fazem uma revisão histórica da trajetória do conceito de função desde que se tem registros conhecidos. Aqui descreveremos uma breve linha do tempo baseada nestas leituras.

Lagrange, em 1988, no prefácio de sua Mecânica analítica traz que os métodos que expõem “não necessitam nem de construções nem de raciocínio geométricos ou mecânicos, mas apenas das operações algébricas”.

O conhecido Plano Cartesiano foi idealizado por René Descartes, no qual relacionou a Álgebra com a Geometria, representando planos, retas, curvas e círculos por meio de equações.

Os estudos anteriormente citados são algumas das contribuições que resultaram na definição que conhecemos hoje, como esta que se encontra em Iezzi e Murakami (1977), por exemplo.

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, ou seja, para todo elemento x pertencente ao conjunto A, denominado Domínio de f, existe um, e apenas um elemento em y pertencente a B, tal que f(x) = y.

Em linguagem comum, isto significa que uma função é uma lei que associa a cada elemento do conjunto de partida, domínio, um elemento, e não mais que um, no conjunto de chegada, contradomínio, constituindo a imagem, como um subconjunto do contradomínio.

3 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES

Os dados analisados, neste trabalho, se constituem em um conjunto de 42 provas, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso Engenharia Agrícola. Esta foi a primeira prova da turma, na disciplina, que constituiu no primeiro material escrito ao qual a professora teve acesso.

A análise da produção escrita das provas, documentos em arquivo, foi autorizada pelo coordenador do respectivo curso e assinados os termos de autorização de cada aluno e tramitado pelo comitê de ética da Unioeste[2], aprovado sob o parecer número 2.676.031 em nome da orientadora. As identidades dos acadêmicos foram preservadas, tendo todos os nomes cobertos por uma fita de papel branca e identificadas por P1, P2, P3, assim por diante, totalizando 42 provas, se procederá à interpretação e descrição das produções escritas nas resoluções das questões da primeira prova escrita.

Uma resolução detalhada foi confeccionada com os passos numerados, explicitando estratégias e procedimentos utilizados, a fim de favorecer a sistematização das descrições.

A fim de descrever, interpretar e analisar as resoluções dos estudantes, por meio de suas produções escritas, vamos nos valer de dois termos: estratégia e procedimento, ambos cunhados e utilizados pelo GEPEMA para efetivar a prática da análise da produção escrita em Matemática. Dalto (2007) caracterizou a

> estratégia como a maneira pela qual o estudante abordou o problema. Por exemplo, para resolver um problema um estudante pode utilizar uma estratégia algébrica, uma aritmética, etc. Já o procedimento relaciona-se ao processo de desenvolvimento da estratégia. [...] (p. 38).

Portanto, a maneira mais geral utilizada na resolução de uma questão é chamada de estratégia, que se caracteriza como a forma mais abrangente de abordagem do enunciado, no entanto a maneira mais específica, utilizada no interior da estratégia, ou seja, os passos desenvolvidos foram chamados pelo grupo de procedimento. Na qual iremos utilizar nas análises das produções dos alunos referente ao item proposto deste estudo. Seu enunciado solicitava que o estudante calculasse h(-2), considerando

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

---

[2] Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Esperávamos que o estudante utilizasse a estratégia de escolher a primeira lei para calcular h(-2), pois o valor de x dado é menor que zero. Portanto, substituindo na primeira lei temos, $h(-2) = 1 - (-2)^2$ (I). Logo, $h(-2) = -3$ (II). Por trás desta escolha está o conceito de função, segundo o qual cada elemento do domínio deve ter uma imagem e não mais que uma. Por isso, deve-se escolher uma lei apenas. Ainda, deve-se levar em conta o conceito de domínio de uma função e observar como a função está definida em cada ponto de seu domínio. O item tratava-se de uma questão envolvendo uma função definida por duas leis.

Em um primeiro momento, as resoluções foram descritas para que posteriormente pudéssemos realizar possíveis agrupamentos, sem expressar juízo de valor, somente identificando a maneira convencional da resolução feita pelo aluno.

Ao analisar separadamente as estratégias dos estudantes utilizadas para resolver a questão proposta, observamos que a correção objetiva, realizada pelo professor, indicou apenas 16 respostas totalmente corretas, das 42 provas. Destas 16 resoluções se desenvolveram de maneira similar à imaginada como descrita a cima. Um olhar mais atento revela que das 27 “não corretas”, três foram deixadas em branco. Afinal o que fizeram os 25 estudantes que resolveram a questão de uma maneira diferente da previamente imaginada, mas que apresentaram uma produção escrita como resolução? A fim de efetivar a avaliação da aprendizagem como prática de investigação é que lançamos mão de descrever tais produções e agrupá-las por similaridade, conforme apresentado abaixo.

Quadro 1: Segundo Agrupamento

Provas	Descrições Agrupadas
P1, P2, P5, P6, P11, P18, P20, P27, P33	Substituiu -2 nas duas leis.
P4, P7, P10, P14, P15, P16, P19, P21, P24, P25, P26, P28, P29, P35, P39, P41	Desenvolveu o item de acordo com a resolução apresentada.
P3	Aplicou as leis em diversos pontos e para o solicitado apresentou a resolução esperada.
P6, P13	Desenvolveu os passos de acordo com a resolução apresentada, mas no resultado não apresentou o Sinal.
P8, P22, P30, P31, P34	Escreveu $-(-2)^2$, mas mesmo valor com o sinal dentro Parênteses e ao quadrado realizou o “jogo de sinais” obtendo um valor positivo.
P9, P37, P42	Não apresentou produção escrita.
P12	Substitui -2 na primeira lei obtendo -3 como resposta. Escreve $h(x) = 3x$.
P17	Substitui -2 nas duas leis. Realiza desigualdades com as leis, a primeira menor ou igual a 0 e a segunda maior que 0. Obtendo -3 em ambas. Apresenta o resultado como um ponto do plano cartesiano $(-3,-3)$.
P23, P32, P36, P38	Desenvolveu na resolução $-(-2)^2$ obtendo -2 .

P40	Desenvolveu da seguinte maneira: $\lim \frac{1-(-2)^2}{2\cdot -2+1} = \frac{-1}{3}$.

Fonte: os autores

Das produções analisadas, três foram deixadas em branco e dezesseis apresentaram resoluções semelhante à esperada, obtendo a resposta correta. Uma, P3, calculou o valor numérico da função para seis valores, três não positivos e três negativos, incluindo -2, escolhendo corretamente a lei, de acordo com o domínio de validade. Dessa forma, consideramos sua resolução semelhante à esperada, embora apresentasse mais cálculos com outros pontos. Isso corrobora com a ideia defendida por Mendes e Buriasco (2018), de que uma atividade avaliativa deve proporcionar que o estudante desenvolva estratégias e procedimentos em amplitude e profundidade, não deixando de lado as notas de conceitos, mas, olhar para cada estudante a partir de seu desenvolvimento, sem comparações externas seja ela em relação aos colegas ou ao modelo idealizado.

Doze estudantes apresentaram, em suas produções escritas, o cálculo do valor numérico da função, em x = -2, nas duas leis. Isso pode indicar um problema na compreensão do conceito de função, uma vez que por definição, cada elemento do domínio deve possuir apenas uma imagem. Nesses registros também podemos inferir que o domínio de validade não é levado em conta, no momento que a substituição é realizada na lei algébrica, uma vez que -2 é um número menor que zero, não satisfazendo a restrição de valores maiores que zero imposta para a segunda lei.

Um aspecto que deve ser levado em conta é que, substituída nas leis, o valor de x = -2, resultaria em -3 para ambas as leis. No entanto, se considerássemos duas funções definidas em todos os reais, por exemplo, $g(x) = 1 - x^2$ e $h(x) = 2x + 1$. Neste caso, o resultado obtido por ambas deveria ser (-3), pois o ponto $(-2,-3)$ é ponto de intersecção entre as funções. Pode-se inferir que estes estudantes consideraram duas funções definidas em todo o conjunto dos reais, pois somente assim faria sentido calcular o valor numérico na segunda lei.

Uma prova P13 apresentou a estratégia correta, a escolha da primeira lei para calcular o valor numérico da função, mas, como resultado um valor simétrico do esperado. E P6 que substituiu -2 em ambas as leis, apresentou em sua solução para a primeira sentença também teve um resultado simétrico do esperado. Isso se deve ao procedimento de operar “1 – 4” resultar em 3. Podemos inferir que o estudante pode ter esquecido de colocar o sinal.

Uma prova apresentou o desenvolvimento de um limite composto pela divisão formada pelas duas leis de formação dessa função, substituindo o x por -2. Outro apresentou duas desigualdades, uma para cada lei, substituindo $x = -2$, obtendo dois valores e representou esta solução entre parênteses $(-3,-3)$. Utilizou a restrição de domínio para montar suas desigualdades, para a primeira $1-(-2)^2 \leq 0$ e para a segunda $2\cdot(-2)+1 > 0$.

Quatro provas apresentaram na resolução uma potência, porém não a desenvolveram corretamente. Quatro fizeram ou não o uso de parênteses e realizaram o “jogo de sinal” do $-(-2^2)$ obtendo uma soma ao invés da subtração. Outra prova, P12, apresentou o desenvolvimento esperado, porém entre seus passos, do lado inferior esquerdo, surgiu um “h(x) = 3x” que não fazia parte da questão e não realizou nenhuma operação com este. Não conseguimos inferir o motivo de tal registro. A produção segue na Figura 1.

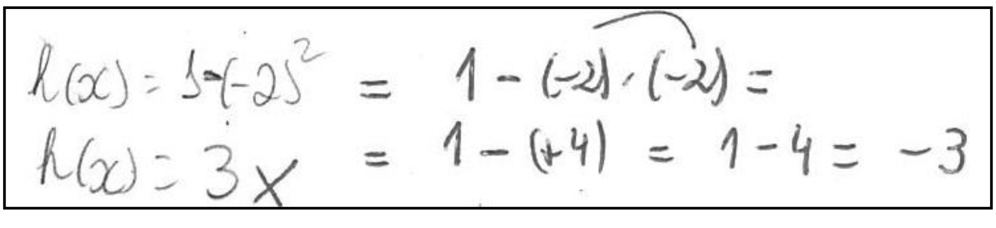

Figura 1 – Produção P12
Fonte: acervo dos autores.

Uma segunda correção apontou para 17 acertos e 25 erradas ou em branco. No entanto, apenas três questões foram deixadas em branco, 21 resoluções chegaram a uma resposta considerada incorreta. Muitas vezes, avaliação tradicional se limita a esta classificação de que em 42 estudantes, 17 acertaram e 25 erraram. É comum encontrar relatórios nos quais aparece a estatística de que houve um aproveitamento de 40%. Por fim, classificamos P12 como estratégia correta e procedimento correto, desconsiderando “h(x) = 3x”.

Assim, a porcentagem de estratégias corretas aumentou quando compreendemos detalhadamente as produções e a sua natureza.

Provas	Terceiro Agrupamento	Categoria
P3, P4, P7, P10, P12, P14, P15, P16, P19, P21, P24, P25, P26, P28, P29, P35, P39, P41	Estratégias corretas com procedimentos corretos.	Estratégias corretas.
P8, P13, P22, P23, P30, P32, P34, P36, P38	Estratégias corretas e procedimentos incorretos.	
P1, P2, P5, P6, P11, P17, P18, P20, P27, P31, P33, P40	Substituição nas duas leis.	Substituição nas duas leis.
P9, P37, P42	Em branco.	Em branco.

Quadro 2 – Terceiro Agrupamento e Categorias
Fonte: os autores

A análise das produções escritas nos mostrou que a maioria dos estudantes, 38 de 42, apresentou uma estratégia para resolver a questão. Apenas três estudantes deixaram em branco. Uma análise detalhada culminou na identificação de 27 resoluções com a estratégia correta, uma vez que dentre as resoluções com respostas incorretas, foram identificadas nove contendo uma estratégia correta, a saber a escolha de apenas uma lei e aquela na qual o -2 pertencia ao domínio de validade, ou seja, escolheram a primeira lei $1 - x^2$, pois -2 é um número menor ou igual a 0. Estas nove produções que se valeram de uma estratégia correta para a resolução comtemplaram o objetivo do item da questão, pois utilizaram de maneira correta a definição de função e levaram em conta o seu domínio de validade para cada uma das leis. O que os levou ao erro de resultado diz respeito a operações aritméticas desenvolvidas na aplicação da lei, ou seja, erro de procedimento. Estes erros dizem respeito à utilização de parênteses e à multiplicação de números inteiros.

O Quadro 2 mostra que a estratégia predominante, além da correta, foi a de calcular o valor numérico da função utilizando-se de duas leis, doze produções escritas apresentaram esta estratégia. O que chamou a atenção foi que todos estes convergiram para uma mesma resolução e disso pode-se inferir, a partir desta análise, que estes alunos não levaram em conta a restrição do domínio e a definição de função. O fato de que, aproximadamente, 30% dos estudantes que apresentaram uma estratégia para resolução apresentarem estratégias idênticas, mas não identificaram ou não reconhecem as restrições de domínio da função, como se as duas leis fossem duas funções diferentes. Isso levou fez pensar que estes 12 estudantes resolveram outra questão e não a proposta, eles resolveram, por exemplo: “Seja $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = 2x + 1$, definidas em

$\Re$, calcule f(-2) e g(-2)". Estes estudantes resolveram este enunciado, tal como Dalto (2007) interpreta algumas produções em sua dissertação de mestrado.

4 BUSCANDO DE ONDE VEM UMA CATEGORIA DE SUBSTITUIÇÃO NAS DUAS LEIS

Dentre as categorias apontadas no Quadro 2, a categoria que mais chama a atenção é a advinda da estratégia identificada, nas produções, denominada "Substituição nas duas leis" nas quais, as duas leis da função foram utilizadas, desconsiderando o domínio de validade, pois o número -2 não pertencia ao domínio correspondente à primeira lei, 2x-1, na primeira lei e contradizendo a definição de função. O item analisado da questão da prova exigia de o aluno mobilizar conhecimentos acerca de domínio de validade de uma função definida por duas leis e da definição de função, simultaneamente. Este assunto foi abordado anteriormente à prova, por meio de aulas expositivas e com listas de exercícios similares a este. Considerando que estes estudantes tenham comparecido às aulas, pode-se inferir que os conhecimentos identificados nestas nove produções sejam advindos do Ensino Médio.

Para respaldar nossa hipótese, de que a abordagem de domínio, muitas vezes, é restrita à abordagem algébrica, foi realizada uma pequena busca em alguns livros didáticos. Buscou-se, em três livros didático, a maneira com que o domínio é abordado e verificou-se que a abordagem fica restrita, na maioria dos casos, apenas a representação algébrica da função definida por apenas uma lei. No livro de Paiva (2013) há muitos exercícios relacionados a determinar o domínio de funções a partir de suas leis algébricas, como "determine o domínio de $f(x)=\sqrt{x-2}$" (p. 135). Este tipo de exercício é bastante comum neste livro, entretanto não há registro de obter o domínio de uma função de duas ou mais leis, bem como poucos casos nos quais é solicitado se encontrar o domínio de uma função por meio de um gráfico. A interpretação geométrica de uma função pode auxiliar a compreensão algébrica. No caso da função por partes proporciona ao aluno uma reflexão sobre os pontos que não estão definidos no gráfico e visualize-os com a restrição do domínio. Exercícios deste tipo são importantes, pois possibilitam relacionar as representações e tem o intuito de desenvolver competências relacionados ao pensamento algébrico afim de envolver o aluno no processo de ensino e aprendizagem de álgebra (AMERON, 2002 *apud* DALTO; BUSRIASCO, 2009).

Contudo, há livros nos quais predomina a abordagem do domínio por meio de gráficos, como é o caso do livro Matemática de Iezzi *et al* (2013). Este livro traz exercícios como "Quais dos gráficos seguintes não representam função de domínio real? Explique." (p. 53). Os gráficos destes exercícios são diversos e contempla até funções por partes. Assim o aluno terá que refletir sobre os pontos que não pertencem ao domínio gráfico e explicar o motivo do domínio ser ou não ser o conjunto dos reais.

Já o livro Conexões com a Matemática de Moderna (2013) traz um exercício de função por partes: "A função a seguir está definida por três sentenças. Calcule, no caderno, o valor de p(x) em cada caso." (p. 79). O enunciado deste exercício é bem similar ao analisado neste artigo. Dentre os três livros analisados este é o único em que o aluno precisa observar em qual sentença deve calcular o valor numérico, visto que há restrição do domínio. Em outro exercício, (p. 79) é dado uma função por partes e seu gráfico, e nos itens do exercício é solicitado que o aluno encontre o domínio desta função.

De maneira geral, os exercícios encontrados apresentavam uma função por meio de sua lei algébrica e solicitavam que o estudante apresentasse o domínio, ou obter o domínio de uma função dado o seu gráfico. Foi encontrado apenas em um livro um exercício abordando o domínio de validade associado às representações algébricas e gráficas simultaneamente.

A forma de abordagem predominante dos livros didáticos do Ensino Médio pode ter condicionado os estudantes a pensar em domínio de validade apenas para resolver um tipo de exercício. Este tipo de exercício apresenta a função por apenas uma lei e fica subtendida que tem como domínio de validade o conjunto dos números reais.

Ainda, a partir de um convívio próximo, a primeira autora lançou o enunciado do item para dois estudantes do Ensino Médio e os observou na resolução realizada por eles em conjunto e recolheu a produção produzida por eles após uma discussão entre os dois.

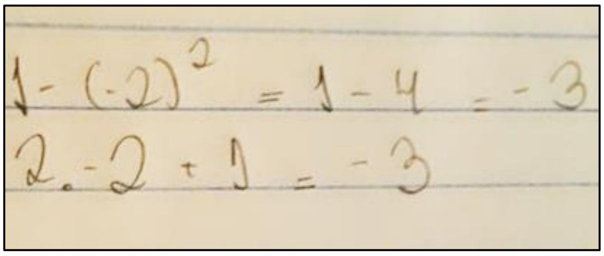

Figura 2: Produção dos estudantes do Ensino Médio
Fonte: acervo dos autores.

A experiência com estes dois estudantes que cursavam o 1º ano do Ensino Médio, um da rede pública e outro da rede particular, permitiu que a identificássemos como pertencente à categoria “Substituição nas duas leis” também. Desenvolveram juntos a questão, discutindo a forma que deveria ser feita e apresentaram a resolução conforme reproduzida na Figura 2, ou seja, substituíram -2 nas duas leis, realizando os procedimentos de maneira correta, obtendo em ambas o resultado -3. Isso pode fortalecer a hipótese de que alguns estudantes trazem este conhecimento do Ensino Médio e que ele se mostra resistente a um ensino tradicional.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A sistematização das produções escritas por meio de suas descrições, análise interpretativa, agrupamentos e a categorização, seguindo os passos indicados pela análise de conteúdo, permitiu identificar quais conhecimentos foram mobilizados nas resoluções de uma questão sobre uma função com duas leis e como os estudantes utilizaram o conteúdo que já lhes foi ensinado na universidade e de que maneira o articulam aos seus conhecimentos prévios.

A partir da categorização das produções, observa-se que a maioria dos estudantes carrega uma bagagem de conhecimento referente a função pois, de 42 estudantes, 39 apresentaram uma resolução escrita para o enunciado e, destes 18 apresentaram uma resolução totalmente correta. Um olhar mais minucioso a partir do Quadro 1, possibilitou identificar que das 21 produções incorretas, nove apresentaram uma estratégia correta para a resolução, a saber, escolheram apenas uma lei e esta lei era aquela na qual a função estava definida, ou seja, levaram em conta a definição de função. Estas produções não chegaram ao resultado correto por que apresentaram erros de procedimentos. Ainda das respostas incorretas, foi possível identificar uma similaridade em doze produções. Esta similaridade que permitiu a categorização, como aponta o Quadro 2, foi o aspecto que mais chamou a atenção. A categoria contendo estas doze produções foi nomeada por “Substituição nas duas leis” e apresentou a substituição de -2 em ambas as leis. Isso revela um conflito entre a definição de função e compreensão do domínio de uma função em situações de funções definidas por mais de uma lei, o que nos levou a buscar a maneira que isso é abordado nos livros didáticos do ensino médio.

Com esta análise percebemos que associar a representação gráfica ao domínio de uma função com leis não é explorada nos livros didáticos e, por isso, inferimos que não seja também abordada nas aulas do Ensino Médio. É comum encontrar nos livros exercícios que abordam o domínio da função, mas não solicitam ou apresentam a representação gráfica e ainda quando solicitam o domínio o fazem com funções envolvendo uma única lei.

Assim, consideramos, tal como Dalto e Buriasco (2009) que grande parte das resoluções consideradas erradas, num primeiro momento, na verdade estavam carregadas de algo que os estudantes demonstravam saber, pois responderam a um problema de enunciado diferente do apresentado na prova. Consideramos que estes estudantes resolveram um enunciado imaginado por eles como sendo duas funções distintas ambas definidas no conjunto dos números reais.

Sendo que, nas aulas desenvolvidas anteriores à prova, na disciplina de Cálculo I, foi abordado o conceito de função com ênfase na definição e no domínio de validade, que muita ênfase foi empreendida às funções envolvendo duas leis. Assim, levantou-se a hipótese de que, no Ensino Médio, o conceito de função e de domínio da função viesse abordado de maneira desvinculada de funções envolvendo duas leis. Por isso a busca nos livros didáticos e o questionamento a dois estudantes do Ensino Médio, um da escola pública e outro da escola particular. Desse último levantamento, concluímos que, de fato, a abordagem apresentada nos livros analisados ocorre de maneira desvinculada, ou seja, em sua maioria são exercícios que apresentam a lei da função e solicitam o cálculo do domínio de validade. No entanto, não associam, ou associam muito pouco o conceito de função e seu domínio de validade e uma função definida por mais de uma lei. Nestes casos, apenas é solicitado ao estudante que construa o seu gráfico.

Dessa pesquisa conclui-se que os estudantes trazem conhecimentos a respeito de função do Ensino Médio que podem estar dificultando seu avanço na Universidade e uma investigação sistematizada em livros didáticos e com estudantes do Ensino Médio poderia comprovar esta hipótese em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX. **Revemat**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p.159-178, 2014.

ALVARENGA, Karly Barbosa; DORR, Raquel Carneiro; VIEIRA, Vanda Domingos. O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 46-57, mar. 2017. ISSN 2447-3944. Disponível em: https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1518. Acesso em: 07 ago. 2019.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

CURY, Helena Noronha. Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São Paulo, 2005. São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBMAC, 2005.

DALTO, Jader Otavio. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. Dissertação. Universidade Estadual de Londrina, 2007.

DALTO, Jader Otavio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Problema proposto ou problema resolvido:** qual a diferença? Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, 2009.

HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos.** 4. ed. Lisboa: Porto, 1994.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Conjuntos Funções. 4. ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** Ciência e Aplicação. São Paulo: Saraiva, 2013.

MENDES, Marcele Tavares; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. O Dinamismo de uma Prova Escrita em Fases: um estudo com alunos de Cálculo Diferencial e Integral. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [s.l.], v. 32, n. 61, p.653-672, ago. 2018. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a17.

MODERNA. **Conexões com a Matemática.** São Paulo: Moderna, 2013.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina; BURIASCO, Regina Luzia Corio. **Análise da Produção Escrita em Matemática**: algumas considerações. Ciência e Educação, v. 11, n. 3, p. 499-512, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** São Paulo: Moderna, 2013.

PONTE, João Pedro. **The history of the concept of function and some educational implications**. The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992.

SILVA, Daniele Peres da; PASSOS, Marinez Mineghenelo; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Algebra. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia** , v. 8, p. 53-84, 2015.

TREVISAN, André Luis; MENDES, Marcele Tavares. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p.209-227, jan./abr. 2018.

VIANNA, Heraldo Marelim. **A prática da Avaliação Educacional:** Algumas colocações metodológicas. Cadernos de Pesquisa, n. 69, São Paulo, 1989. p. 40-47.

YOUSCHKEVITCH, Adolph–Andrei Pavlovich. **Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX e siècle**. Fragments d'historie des Mathématiques. Brochure A.P.M. E. P., n. 41, p. 7-67, 1981.