

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS COM NÃO LINEARIDADE FÍSICA, CONSIDERANDO AS TEORIAS DA ELASTOPLASTICIDADE E DO DANO

Luiz Antonio Farani de Souza

Professor, Doutor, Curso de Engenharia Civil, UTFPR, Apucarana, PR. lasouza@utfpr.edu.br

RESUMO

A segurança e economia são atualmente dois dos fatores que mais contribuem para favorecer a análise não linear de estruturas. É evidente que o grau de complexidade e de precisão aumenta à medida que a análise da estrutura é sofisticada. Efeitos não lineares de diferentes tipos podem estar presentes no modelo matemático da resposta de estruturas da engenharia. Nesse contexto, neste artigo são obtidas as trajetórias de equilíbrio de estruturas reticuladas constituídas por barras biarticuladas, submetidas a ciclos de carregamento e descarregamento. O efeito da não linearidade física é considerado nas análises estáticas, e dois modelos constitutivos são implementados computacionalmente - um baseado na teoria clássica da Elastoplasticidade e o outro na teoria da Mecânica do Dano. O sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio do sistema estrutural é solucionado pelo procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson. As simulações são realizadas no programa Matlab.

PALAVRAS-CHAVE: Treliza plana; não linearidade física; Newton-Raphson; trajetória de equilíbrio.

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem-se registrado diversos acidentes com estruturas treliçadas espaciais, a maior parte ocorrida de forma repentina. Na sua grande maioria, estes problemas ocorrem devido à incoerência entre modelos de cálculo admitidos e o comportamento real da estrutura (SAMPAIO; GONÇALVES, 2007).

A análise linear ainda é largamente utilizada no meio acadêmico para determinação de deslocamentos, rotações e esforços de uma estrutura, pelo fato de ser mais prática e com maior facilidade de implementação computacional (CUNHA, 2017).

Na análise não linear de uma estrutura, deseja-se obter trajetórias de equilíbrio para determinados graus de liberdade da discretização, executando-se um processo incremental e iterativo nas variáveis do problema. Dessa maneira, dado um campo de deslocamentos e um fator de carga proporcional, equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio, deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental seja controlada (PITANGUEIRA; FUINA, 2003).

Muitos problemas da Engenharia Estrutural são caracterizados por uma resposta não linear. A modelagem matemática de tais problemas leva a sistemas de equações não lineares que são solucionados numericamente com procedimentos incrementais e iterativos. Efeitos não lineares de diferentes fontes podem estar presentes na modelagem matemática da resposta de estruturas de engenharia (MUÑOZ; ROEHL, 2017).

Duas diferentes classes de não linearidade são normalmente identificadas: a geométrica, produzida por deformações finitas acompanhadas de modificações na rigidez de uma estrutura sob um certo carregamento aplicado, e a física, em que as propriedades do material utilizado dependem das deformações, as quais, no entanto, não são conhecidas antecipadamente (PINHEIRO; SILVEIRA, 2004).

Neste artigo, são consideradas somente estruturas com comportamento não linear físico. Análises de sistemas estruturais planos constituídos por barras biarticuladas são efetuadas com o programa Matlab (MATLAB, 2015), supondo que as deformações sejam suficientemente pequenas e que o carregamento seja aplicado lentamente (análise estática).

O sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio estático das estruturas é solucionado pelo procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson. As trajetórias de equilíbrio de estruturas reticuladas submetidas a ciclos de carga e descarga são obtidas.

O efeito da não linearidade física é considerado por meio de dois modelos constitutivos: um baseado na teoria clássica da Elastoplasticidade (SIMO; HUGHES, 2000; YAW, 2017); e o outro na teoria da Mecânica do Contínuo (MANZOLI, 1998).

Os modelos constitutivos fundamentados na teoria da Mecânica do Dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas, com a finalidade de prever a degradação do material. Essa teoria lida com a capacidade de carga de sólidos em que o próprio material é danificado devido à presença de microdefeitos, tais como microfissuras e microvazios (LEMAITRE, 2012). O efeito da microfissuração sobre o módulo elástico inicial pode ser evidenciado, macroscopicamente, ao longo do ramo de amolecimento (*softening*) da curva tensão-deformação (PITUBA, 2010).

Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que, após atingida a carga de escoamento do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo, ou seja, a estrutura do material se modifica de maneira irreversível, mas mantendo a parcela de deformação elástica constante (CHEN; HAN, 2007). Para o cálculo das deformações plásticas, três propriedades caracterizam o comportamento material: a função de escoamento, que especifica o estado de tensão correspondente ao início do fluxo plástico; a regra de fluxo, que relaciona os incrementos de deformação plástica com as tensões correntes e incrementos de tensão; e a regra de endurecimento, que especifica como a função de escoamento é modificada durante o fluxo plástico (BATHE, 2006).

2 MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 PROBLEMA ESTRUTURAL

O esquema iterativo mais frequentemente utilizado para se obter a solução do sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio estático de uma estrutura é o método de Newton-Raphson (NR). O equilíbrio requer encontrar a solução do seguinte sistema (BATHE, 2006):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas e \mathbf{F}_{ext} é o vetor de força externa. O subincremento de deslocamentos $\delta\mathbf{u}$ é calculado por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}, \quad (2)$$

na qual $\mathbf{K}^{(k-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez tangente (matriz Jacobiana) e $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamento na iteração k e passo de força corrente. O vetor de deslocamentos \mathbf{u} na iteração k é avaliado por:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (3)$$

A solução do problema estrutural dado pela Equação (1) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental, ou seja, a solução é obtida por meio de uma análise

incremental com passos de força Δt . As condições iniciais para cada passo de força $t+\Delta t$ é:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K} \quad , \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}_{int} \quad , \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(0)} = {}^t\mathbf{u} \quad . \quad (6)$$

No método de Newton-Raphson modificado (NRM) o esquema iterativo é dado por:

$$\mathbf{K}^{(0)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} \quad , \quad (7)$$

com as condições iniciais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}_{int}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(0)} = {}^t\mathbf{u}$.

Comparando os métodos NR e NRM, observa-se que o custo computacional da iteração deste método é menos caro do que daquele método, porque no método NRM a matriz de rigidez \mathbf{K} é avaliada somente no início de passo de força corrente e se mantém invariável durante o ciclo iterativo. A escolha do método depende do grau de não linearidade da resposta do problema.

O processo iterativo termina quando um ou mais critérios de convergência forem atendidos, indicando uma nova posição de equilíbrio para o sistema estrutural. Foram adotados dois critérios: o primeiro critério é baseado em relações de força definido como segue:

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\mathbf{F}_{ext}\|} \leq tol. \quad (8)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e tol é a tolerância fornecida pelo usuário. O segundo critério de convergência obedece a seguinte relação de deslocamento, verificado ao final da iteração:

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\|} \leq tol, \quad (9)$$

em que $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o incremento de deslocamentos na iteração k obtido por:

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (10)$$

2.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO

O modelo elastoplástico implementado é fundamentado nos trabalhos de Simo e Hughes (2000) e Yaw (2017). Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que após atingida a tensão de escoamento do material (σ_y), toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo. A estrutura do material se modifica de maneira irreversível, mas mantendo a parcela de deformação elástica constante.

A deformação total (ε) pode ser dividida em duas parcelas: deformação elástica (ε_e) e deformação plástica (ε_p) (MELO, 2015):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (11)$$

O valor da tensão σ é dado por:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_e = E_0 (\varepsilon - \varepsilon_p), \quad (12)$$

na qual E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal inicial. O critério de escoamento $f(\sigma)$ é expressado por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha), \quad (13)$$

na qual $G(\alpha)$ é uma função que descreve a variação da tensão de escoamento σ_Y , cuja expressão para o caso de encruamento linear é:

$$G(\alpha) = \sigma_Y + B\alpha, \quad (14)$$

em que α é a Variável de *Hardening* e B é o Módulo Plástico. Na Equação (14), se o valor de B for positivo, tem-se uma inclinação positiva do trecho de plastificação, indicando *hardening*. Caso o valor de B for negativo, tem-se uma inclinação negativa da curva tensão-deformação, indicando *softening*. Finalmente, $B = 0$ corresponde ao modelo elastoplástico perfeito.

No caso do encruamento linear, o módulo tangente elastoplástico E_T é dado por:

$$E_T = \frac{E_0 B}{E_0 + B} \quad (15)$$

2.3 MODELO DE DANO ISOTRÓPICO

Para descrever o comportamento do material segundo a Mecânica do Dano, utiliza-se o modelo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por (RODRIGUES, 2011):

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon, \quad (16)$$

na qual E_0 é o módulo de elasticidade inicial do material (não danificado), e ε é a deformação específica. O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

$$r_0 = \frac{f_0}{\sqrt{E_0}}. \quad (17)$$

Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \quad (18)$$

O critério de degradação $f(\bar{\sigma})$ é expresso da seguinte forma:

$$f(\bar{\sigma}) = \tau(\bar{\sigma}) - r_0 \leq 0. \quad (19)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r, \tau). \quad (20)$$

A partir das Equações (16) e (18), τ pode ser expresso em termos da deformação ε por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon. \quad (21)$$

A tensão normal σ no material é obtida da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - d)E_0\varepsilon, \quad (22)$$

na qual d é o dano e é escrito em função do módulo H e do limite de dano r por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \quad (23)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 1 em (a) o regime elastodegradável perfeito, em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento), e em (d) o abrandamento exponencial.

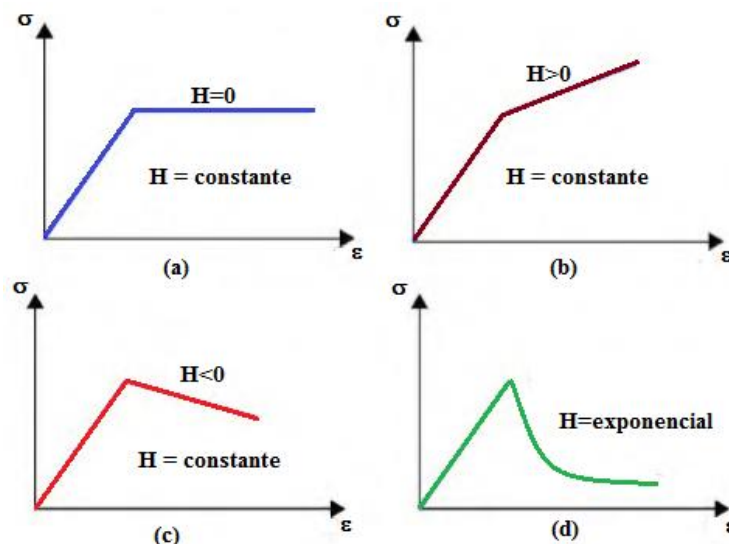


Figura 1: Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento

Fonte: Adaptado de Rodrigues (2011)

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nas análises dos sistemas estruturais, assume-se que o carregamento é aplicado lentamente e que as deformações são pequenas. O peso próprio das estruturas é desprezado.

Os algoritmos desenvolvidos foram implementados no *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (MATLAB, 2015), e as simulações computacionais foram realizadas em um computador Core i7 - 3537U com 8GB de memória.

Considere a barra biengastada sujeita a uma força axial P , com área da seção transversal $A = 1,0 \text{ cm}^2$ e módulo de elasticidade $E_0 = 1,0 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, conforme ilustra a Figura 2. Este problema foi estudado por Bathe (2006). A barra é submetida a ciclos de carregamento e descarregamento. Adota-se o comportamento material elastoplástico com encruamento positivo. Os parâmetros dos modelos Elastoplástico e de Dano estão

descritos na Tabela 1. Emprega-se o método de Newton-Raphson com controle de força constante para o solução do sistema de equações não lineares.

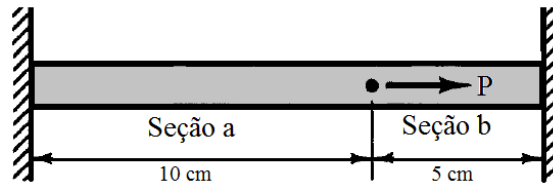


Figura 2: Modelo estrutural da barra biengastada
 Fonte: Adaptado de Bathe (2006)

Tabela 1: Parâmetros dos modelos constitutivos para a barra biengastada.

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
$B = 1,0101 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$	$H = 0,045$
$\sigma_Y = 2,0 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$	$f_0 = 2,0 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$

Fonte: Bathe (2006).

As equações de equilíbrio iterativas para a barra biengastada são dadas por (BATHE, 2006):

$$A \left(\frac{E_a^{(k-1)}}{L_a} + \frac{E_b^{(k-1)}}{L_b} \right) \delta u^{(k)} = P - A (E_a^{(k)} \varepsilon_a^{(k)} + E_b^{(k)} \varepsilon_b^{(k)}), \quad (24)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \delta u^{(k)}. \quad (25)$$

Nota-se nas Equações (24) e (25) que o subíndice indica a seção (a ou b) e os superíndices k a iteração corrente e $(k-1)$ a iteração anterior. Na Figura 3 aparecem as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga *versus* força P) obtidas com o modelo Elastoplástico e com o modelo de Dano isotrópico. A tolerância utilizada para os critérios de convergência (Equações (8) e (9)) é $tol = 1,0 \times 10^{-7}$.

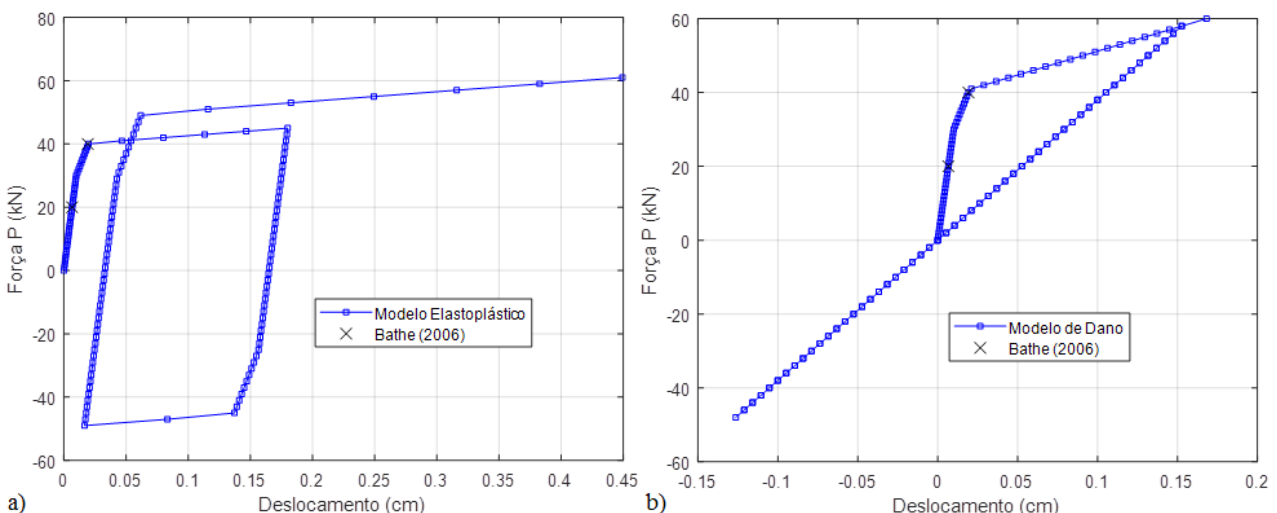


Figura 3: Trajetórias de equilíbrio para a barra biengastada: a) modelo Elastoplástico; e b) modelo de Dano

Fonte: O próprio Autor

Seja, na Figura 4, o sistema estrutural constituído por três barras biarticuladas e uma barra rígida ($EA \cong \infty$) e sujeito à força de intensidade P . Este problema foi adaptado de Lourenço (1999). As barras têm comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, seção transversal $A = 10 \text{ cm}^2$

e módulo de elasticidade $E_0 = 200,0$ GPa. Supõe-se que o comportamento constitutivo das barras seja elástico perfeitamente plástico com tensões de escoamento diferentes para cada barra, cujos parâmetros estão na Tabela 2. Na Figura 5 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento horizontal *versus* força P) com ciclos de carregamento e descarregamento obtidas com os modelos constitutivos. A tolerância utilizada no método de solução para os critérios de convergência é $tol = 1,0 \times 10^{-7}$. A solução do problema é obtida com o método iterativo de Newton-Raphson padrão associado à técnica de controle de força constante.

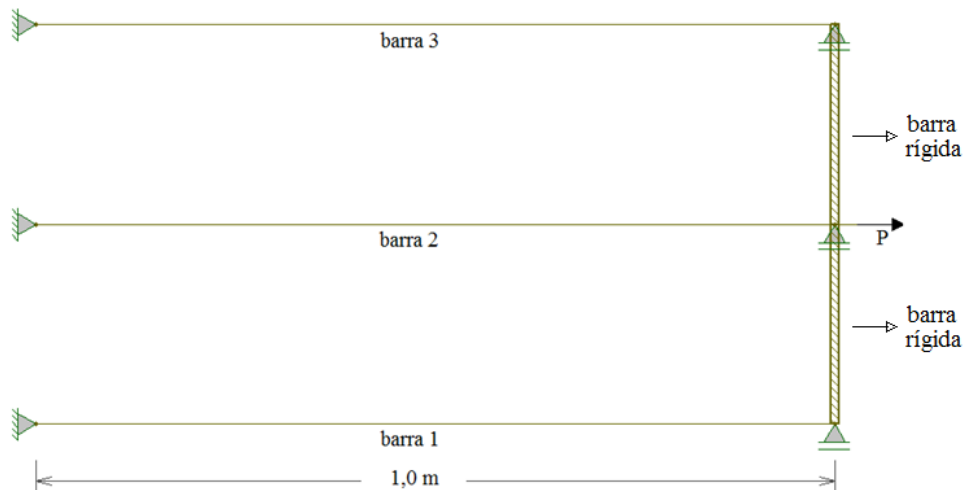


Figura 4: Estrutura constituída por 3 barras solicitadas axialmente
Fonte: Adaptado do programa Ftool

Tabela 2: Parâmetros dos modelos constitutivos para o sistema com três barras

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
Barra 1: $\sigma_Y = 100$ MPa e $B = 0$	Barra 1: $H = 0, f_0 = 100$ MPa
Barra 2: $\sigma_Y = 200$ MPa e $B = 0$	Barra 2: $H = 0, f_0 = 200$ MPa
Barra 3: $\sigma_Y = 300$ MPa e $B = 0$	Barra 3: $H = 0, f_0 = 300$ MPa

Fonte: Lourenço (1999)

As equações de equilíbrio iterativas para o sistema estrutural são:

$$\frac{A}{L} (E_1^{(k-1)} + E_2^{(k-1)} + E_3^{(k-1)}) \delta u^{(k)} = \frac{P}{3} - A (E_1^{(k-1)} \varepsilon_1^{(k)} + E_2^{(k-1)} \varepsilon_2^{(k)} + E_3^{(k-1)} \varepsilon_3^{(k)}), \quad (26)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \delta u^{(k)}. \quad (27)$$

Vê-se, nas Figuras 3a e 5a, que ao descarregar e carregar as estruturas com o modelo Elastoplástico, os trechos elásticos lineares ficaram paralelos ao trecho elástico inicial. Além disso, as estruturas não retornam à posição inicial antes da aplicação do carregamento devido às deformações plásticas registradas durante o processo de carregamento e descarregamento.

Verifica-se na Figura 3a que o material da barra inicia a plastificação com valores diferentes da tensão de escoamento na tração e na compressão. Da mesma forma, na Figura 3b, para cada processo de carregamento do sistema estrutural, o material inicia o escoamento com um novo valor da tensão σ_Y . Esse fenômeno observado nas trajetórias é conhecido como Efeito de Bauschinger e evidencia que, em um modelo constitutivo elastoplástico, a deformação não é uma função apenas da tensão, mas também da história de carregamento e descarregamento do material. Diz-se então, que o

comportamento do material é dependente do caminho ou trajetória de carregamento (*path dependent*). Fica evidente que a cada processo de carregamento da estrutura, maiores são os deslocamentos registrados, o que pode levar a estrutura ao colapso estrutural por fadiga.

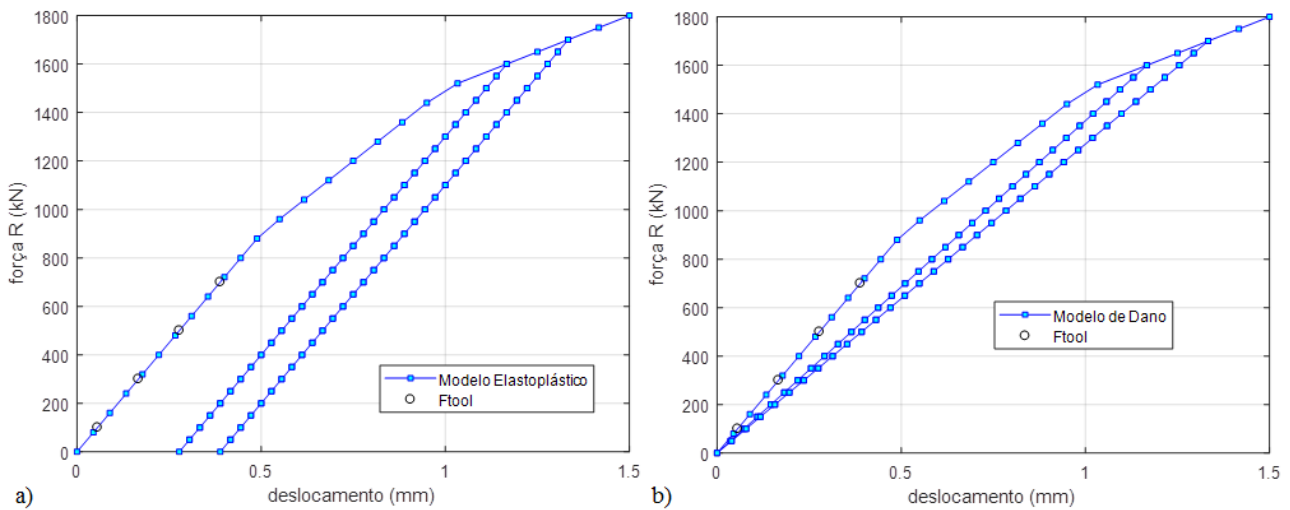


Figura 5: Trajetórias de equilíbrio para a estrutura com três barras: a) modelo Elastoplástico; e b) modelo de Dano

Fonte: O próprio Autor

As Figuras 3b e 5b mostram as trajetórias de equilíbrio obtidas com o modelo de Dano. Quando o valor da função $f(\bar{\sigma}) < 0$ (Equação (19)), não há evolução da variável limite de dano r e, portanto, não há evolução do dano d (é o caso, por exemplo, do processo de descarregamento). Entretanto, se a função $f(\bar{\sigma}) \geq 0$, há evolução da variável dano ($\dot{d} \neq 0$). Observa-se que as estruturas no descarregamento retornam para a sua configuração indeformada ou inicial.

Seja o problema adimensional de uma treliça plana estaticamente indeterminada com duas forças concentradas aplicadas simetricamente, conforme o modelo estrutural ilustrado na Figura 6. Esta estrutura foi analisada por Powell e Simons (1981) e Gutiérrez (2014), considerando um endurecimento linear positivo do material na evolução dos deslocamentos plásticos. As barras têm módulo de elasticidade inicial $E_0 = 1,0 \times 10^5$ e área da seção $A = 1,0$. A resposta de deslocamento vertical no nó 5 *versus* força P , para um ciclo de carga-descarga é mostrada na Figura 7. Os parâmetros constitutivos adimensionais para os modelos são apresentados na Tabela 3.

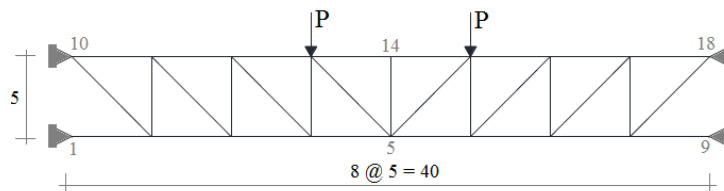


Figura 6: Modelo estrutural da treliça plana

Fonte: Adaptada de Gutiérrez (2014)

Tabela 3: Parâmetros constitutivos referentes aos modelos Elastoplástico e Dano

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
$B = 0,02 E_0$	$H = 0,02$
$\sigma_Y = 65$ (diagonais)	$f_0 = 65$ (diagonais)
$\sigma_Y = 61,1$ (demais barras)	$f_0 = 61,1$ (demais barras)

Fonte: Powell e Simons (1981)

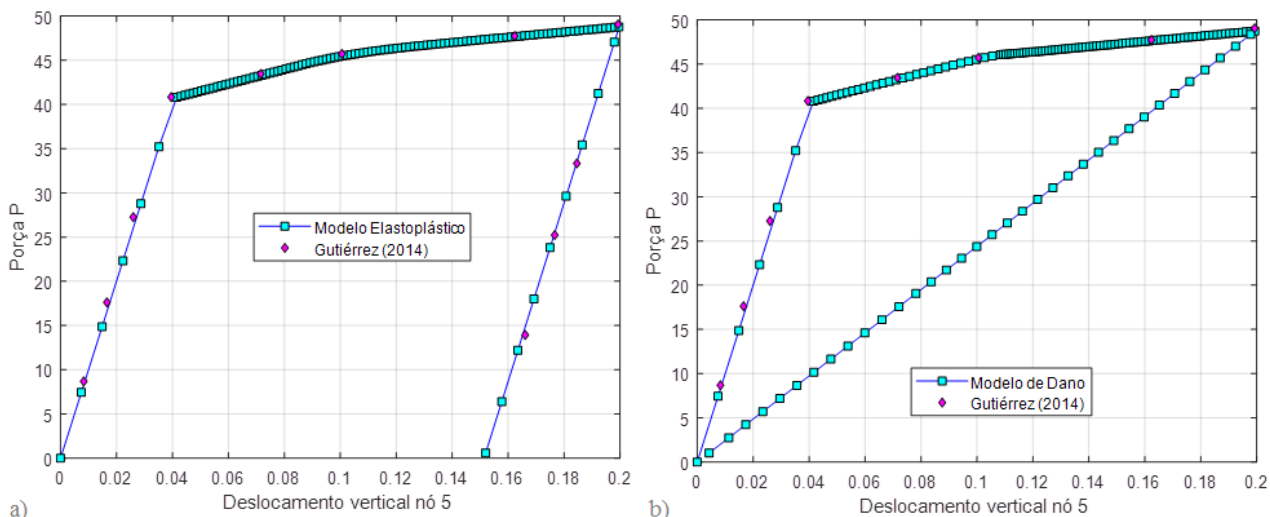


Figura 7: Trajetórias de equilíbrio: a) modelo Elastoplástico; e b) modelo de Dano

Fonte: O próprio Autor

As trajetórias de equilíbrio na Figura 7 foram obtidas com o Método do Elementos Finitos, e a solução do problema estrutural foi solucionado com o método incremental-iterativo de Newton-Raphson associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. O algoritmo e a formulação são apresentados em Souza et al. (2018). Nas análises são considerados os seguintes parâmetros: comprimento inicial de arco $\Delta l^{(0)} = 0,02$; número máximo de iterações em cada passo de força $k_{m\acute{a}x} = 150$; número de iterações desejadas em cada passo de força $Nd = 3$; tolerância $tol = 1,0 \times 10^{-10}$; e incremento de força $\Delta P = 1$.

Observa-se, na Figura 7a, boa concordância entre a trajetória obtida com o modelo Elastoplástico implementado neste trabalho e os pontos de equilíbrio obtidos por Gutiérrez (2014).

4 CONCLUSÃO

Modelos constitutivos de Plasticidade e de Dano são frequentemente utilizados em programas de Elementos Finitos para análise do comportamento não linear físico. Os algoritmos referentes aos modelos foram aplicados em sistemas estruturais planos constituídos por barras biarticuladas e submetidos a ciclos de carregamento-descarregamento, e pode ser verificadas diferenças nas trajetórias de equilíbrio obtidas por cada um. O comportamento global da estrutura depende da resposta mecânica de cada um dos seus materiais constituintes.

Dessa maneira, a adequada escolha da relação constitutiva do material é fundamental para que se possa prever o comportamento mecânico dos componentes que compõem a estrutura. O processo de falha de um material é caracterizado pelo acúmulo de deformações permanentes (plásticas) e pela degradação do mesmo. Modelos constitutivos que incorporem ambas características têm potencial para uma descrição mais realista do seu comportamento.

Em muitas situações a análise não linear é importante, como no caso de estruturas muito esbeltas ou estruturas submetidas a ações excepcionais. Além disso, uma análise não linear torna-se necessária para a verificação da capacidade resistente de estruturas existentes que serão submetidas a novos carregamentos não previstos em projetos ou em casos em que as cargas foram subestimadas no projeto estrutural. Compete ao analista/projetista a decisão acerca do grau de sofisticação adequado (ou necessário) para a análise em causa.

Como pesquisa futura, sugere-se: análise de estruturas treliçadas tridimensionais; a incorporação nas análises da não linearidade geométrica; consideração de outros aspectos na análise como a temperatura, imperfeições das estruturas, tensões residuais; e aplicação de outros métodos de solução, como o do Ponto Médio e de Potra-Pták, associados a técnicas de continuação, para a resolução do problema estrutural.

REFERÊNCIAS

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 2006.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. J. Ross Publishing, 2007.

CUNHA, P. F. L. **Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

GUTIÉRREZ, M. P. D. **Análise elastoplástica de estruturas metálicas usando o conceito de rótulas plásticas e o algoritmo de retorno radial**. 2014. Dissertação (Mestrado em Estruturas) Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília, DF, 2014.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Springer Science & Business Media, 2012.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Guimarães, Portugal, 1999.

MANZOLI, O. L. **Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos**. 1998. Tese (Doutorado) - Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.

MELO, C. D. R. **Estudo do colapso progressivo de pórticos planos de concreto armado via análise não linear**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. A Continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 130, p. 53-64, 2017.

PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M. Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 57, n. 2, p. 85-92, 2004.

PITANGUEIRA, R. L.; FUINA, J. S. Combinações de deformações para controlar trajetórias de equilíbrio em análise não-linear de estruturas. In: *Mecânica Computacional Vol. XXII*, M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores), 2003. **Anais** [...]Bahía Blanca, Argentina: Mecánica Computacional, Noviembre, 2003.

PITUBA, J. J. C. Validação de um modelo de dano para a análise não-linear de estruturas em concreto armado. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 32, n. 3, p. 251-259, 2010.

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. 2011. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2011.

SAMPAIO, T. S.; GONÇALVES, R. M. Análise numérica, via MEF, de ligações em treliças metálicas espaciais. **Cadernos de engenharia de estruturas**, São Carlos, v. 9, n. 38, p. 29-61, 2007.

SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational inelasticity**. Springer, 2000.

SOUZA, L. A. F.; MARTINS, R. D. S. V.; XAVIER, J. C.; PORTO, J. H. Aplicação e comparação de métodos numéricos na solução de sistemas de equações lineares em problemas de treliças espaciais. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 39, n. 1, p. 49-60, 2018b.

YAW, L. L. **Nonlinear Static - 1D Plasticity - Isotropic and Kinematic Hardening**. Walla Walla University, 2017.