



# IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE MÉTODOS IMPLÍCITOS PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR TRANSIENTE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Luiz Antonio Farani de Souza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Professor do Curso de Engenharia Civil, Campus Apucarana-PR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.  
lasouza@utfpr.edu.br

## RESUMO

Este trabalho teve por objetivo apresentar um modelo numérico-computacional para análise não linear dinâmica transiente de estruturas reticuladas. As formulações de cinco métodos implícitos de integração encontrados na literatura foram apresentadas. Um código computacional com os algoritmos desses métodos foi desenvolvido com o programa livre Scilab. Um exemplo numérico de uma viga biengastada sujeita a uma carga dinâmica foi apresentado com o propósito de aplicar e comparar as respostas não lineares dinâmicas obtidas pelos métodos de solução implementados. A estrutura foi discretizada por meio da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. A resposta transiente foi obtida solucionando um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A obtenção das respostas dinâmicas foi feita combinando-se as técnicas de integração temporal com o método iterativo de Newton-Raphson padrão. Os resultados numéricos evidenciaram que a escolha do intervalo de tempo é fundamental na análise transiente, uma vez que está relacionado com a precisão e com o esforço computacional. Por fim, para a definição do método implícito a ser utilizado pelo analista/projetista em simulações estruturais, dois aspectos devem ser considerados na análise dinâmica, que são a precisão e a estabilidade.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise dinâmica não linear; Métodos implícitos; Formulação corrotacional; Análise transiente.

## 1 INTRODUÇÃO

Pesquisas têm sido focadas no desenvolvimento de métodos eficazes de elementos finitos para análise dinâmica não linear. Destaca-se o desenvolvimento de esquemas passo a passo de integração direta no tempo para as equações de movimento não lineares. Esses esquemas são extensivamente usados para análise dinâmica estrutural. Para encontrar a solução no tempo  $t$ , o intervalo de tempo entre 0 e  $t$  é subdividido em  $n$  intervalos de tempo  $\Delta t$ . Então, em vez de satisfazer a equação de movimento em qualquer tempo  $t$ , o equilíbrio dinâmico é geralmente satisfeito apenas em pontos de tempo discretos. Além disso, assume-se que a variação de aceleração, velocidade e deslocamento dentro de cada intervalo de tempo segue um padrão especial (REZAIIEE-PAJAND; ESFEHANI; KARIMI-RAD, 2018).

O objetivo dos esquemas numéricos para a análise dinâmica estrutural não linear é fornecer uma solução suficientemente precisa no tempo para o problema em consideração. Os métodos de integração temporal têm sido amplamente utilizados na análise dinâmica estrutural. Em geral, os métodos de integração de tempo podem ser categorizados como métodos explícitos e implícitos (QU et al., 2017; LAVRENČIČ; BRANK, 2020).

Os métodos explícitos empregam informações prévias para calcular o deslocamento atual, o que significa que eles são livres de inversão da matriz de rigidez; consequentemente, possuem alta eficiência computacional, principalmente quando as matrizes de massa e amortecimento são diagonais. Em contraste, os métodos implícitos usam informações atuais para avaliar o deslocamento atual e, portanto, exigem maior custo computacional nas operações da matriz em cada etapa. No entanto, os métodos explícitos permitem apenas tamanhos de passo de tempo abaixo de um valor crítico, enquanto que



os métodos implícitos não têm limitações de tamanho do passo de tempo (ZHANG; XING, 2019).

Estruturas com grande altura ou grande vão, encontradas em edifícios, pontes e torres de transmissão, resultam em grandes deformações na resposta dinâmica, quando submetidas a terremoto, carga de vento, entre outras. As grandes deflexões e rotações das estruturas induzem à não linearidade geométrica na resposta dinâmica. Embora esforços na análise dinâmica não linear tenham sido feitos nas últimas décadas, considerando o número massivo de componentes e a complexidade das estruturas modernas combinadas com a complicada motivação dinâmica, procedimentos simples, robustos, eficientes e estáveis para a resposta dinâmica não linear com grandes deslocamentos são desejáveis (CHEN et al., 2022)

Com base na configuração de referência usada para descrever o movimento de um elemento finito, há três formulações diferentes para lidar com a não linearidade geométrica, que são as formulações Lagrangiana Atualizada (LA), Lagrangiana Total (LT) e Corrotacional (CR). Na formulação LT, a configuração de referência é o estado inicial não deformado, enquanto que a formulação LA adota o último estado deformado conhecido como configuração de referência. Na formulação CR, o movimento do elemento é decomposto em corpo rígido e deformacional puro. Um sistema de coordenadas locais, que translada e rotaciona com o movimento geral do corpo rígido do elemento, é definido. A parte deformacional é medida nesse sistema local (THAI et al., 2020; VIANA et al., 2020).

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo numérico-computacional para análise não linear dinâmica transiente de estruturas reticuladas. As formulações de cinco métodos implícitos de integração, quais sejam, Newmark (1959), WBZ- $\alpha$  (WOOD et al., 1980), HHT- $\alpha$  (HILBER et al., 1977),  $\alpha$ -Generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993) e Liu, Li e Zhao (2013), são apresentadas. Um código computacional com os algoritmos desses métodos é desenvolvido com programa livre Scilab, versão 2023.1.0 (SCILAB, 2023), e é aplicado em um problema de uma viga biengastada encontrado na literatura com o fim de validá-lo.

A estrutura é discretizada por meio da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos (MEF) apresentada por Crisfield (1991) e Yaw (2009) considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Supõe-se que a relação constitutiva do material é elástica linear. Ao discretizar o sistema estrutural por meio do MEF, a resposta transiente é obtida solucionando um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A obtenção da resposta dinâmica não linear é feita combinando-se as técnicas de integração temporal com o método iterativo de Newton-Raphson padrão.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

### 2.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A equação de movimento para um sistema dinâmico estrutural pode ser expressa da seguinte forma (ZHANG; LIU; LIU, 2017; SOUZA, 2023):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente; o vetor de deslocamento é dado por  $\mathbf{u}$ , e sua diferenciação de primeira e segunda ordem em relação ao tempo é denotada como  $\dot{\mathbf{u}}$  (velocidade) e  $\ddot{\mathbf{u}}$  (aceleração), respectivamente; e  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é um vetor de carga dado em função do tempo  $t$ . Um procedimento alternativo e eficaz para obter a solução da Equação (1) é o método de integração direta, que integra numericamente a resposta dinâmica estrutural passo a passo. A equação de movimento é satisfeita em um



ponto de tempo discreto  $\Delta t$  separado no tempo. A solução avança no tempo assumindo variações de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo  $\Delta t$ .

Resolver o sistema em Equação (1) consiste em encontrar a solução da estrutura no instante  $t + \Delta t$ , satisfazendo as seguintes condições iniciais do problema (KIM, 2020):

$$\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{0}_u \text{ e } \dot{\mathbf{u}}(t = 0) = \mathbf{0}_{\dot{u}} \quad (2)$$

A aceleração em  $t = 0$  é obtida diretamente por:

$$\mathbf{0}_{\ddot{u}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{C} \mathbf{0}_{\dot{u}} - \mathbf{K} \mathbf{0}_u) \quad (3)$$

Para a solução de problemas de dinâmica transiente, métodos de integração passo a passo são amplamente utilizados. Basicamente há duas classes gerais de algoritmos para problemas dinâmicos - implícitos e explícitos (ZHANG; LIU; LIU, 2017). Nos métodos explícitos, a solução no tempo corrente  $t + \Delta t$  é obtida considerando as condições de equilíbrio no tempo anterior  $t$  e, assim, não há necessidade de processos iterativos em cada incremento. Nos métodos implícitos, as equações de equilíbrio para o intervalo de tempo  $t + \Delta t$  dependem desse mesmo intervalo de tempo e também do intervalo de tempo passado  $t$  e, portanto, é necessário o emprego de processos iterativos dentro de cada intervalo de tempo.

Algoritmos implícitos tendem a ser numericamente estáveis, permitindo grandes intervalos de tempo, e são mais efetivos para problemas de dinâmica estrutural em que a resposta é controlada por um número relativamente pequeno de modos de baixa frequência (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989).

## 2.2 MÉTODO DE LIU, LI E ZHAO (2013)

O método proposto por Liu, Li e Zhao (2013) conserva a energia total. Usando as iterações de Newton-Raphson, apenas um conjunto de equações implícitas precisa ser resolvido nos pontos discretos de tempo com uma matriz de rigidez efetiva ( $\mathbf{K}_{\text{ef}}$ ) simétrica e um vetor de carga efetiva ( $\mathbf{F}_{\text{ef}}$ ). Além disso, esse método leva ao mesmo esforço computacional da Regra Trapezoidal, sem quaisquer variáveis adicionais e parâmetros artificiais envolvidos. A integração direta no tempo é um procedimento numérico passo a passo. Ela resolve a Equação (1) em um conjunto de pontos de tempo discretos, não em qualquer ponto de tempo. Assume-se que as soluções são obtidas até o tempo  $t$  com o incremento de tempo  $\Delta t$ , de modo que se pode encontrar a solução no tempo  $t + \Delta t$  por meio da seguinte equação iterativa:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k+1)} \Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k+1)}, \quad (4)$$

em que

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k)}, \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} \left( {}^t\mathbf{u} + \Delta t \dot{{}^t\mathbf{u}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(k)} \right), \quad (6)$$

nas quais o número de iteração  $k = 0, 1, 2, \dots$ . O vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  no tempo  $t + \Delta t$  é atualizado pela equação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k+1)}. \quad (7)$$

Uma vez alcançada a convergência, a aceleração e a velocidade no tempo  $t + \Delta t$  são avaliadas por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \frac{2}{\Delta t^2} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k+1)} - {}^t\mathbf{u} - \Delta t \dot{{}^t\mathbf{u}} \right), \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \dot{{}^t\mathbf{u}} + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{{}^t\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \right). \quad (9)$$



## 2.3 MÉTODO $\alpha$ -GENERALIZADO

O método  $\alpha$ -Generalizado foi apresentado por Chung e Hulbert (1993) e consiste na combinação dos métodos HHT- $\alpha$  (HILBER et al., 1977) e WBZ- $\alpha$  (WOOD et al., 1980). A equação de equilíbrio é modificada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t-\alpha_m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t-\alpha_f}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t-\alpha_f}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t-\alpha_f}\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (10)$$

Os vetores aceleração, velocidade, deslocamento, forças internas e forças externas são determinados por meio da média ponderada dos seus respectivos valores para os passos de tempo  $t$  e  $(t + \Delta t)$ . Assim, as expressões que descrevem tais variáveis são definidas por:

$${}^{t+\Delta t-\alpha_m}\ddot{\mathbf{u}} = (1 - \alpha_m){}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_m {}^t\ddot{\mathbf{u}}, \quad (11)$$

$${}^{t+\Delta t-\alpha_f}\dot{\mathbf{u}} = (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + \alpha_f {}^t\dot{\mathbf{u}}, \quad (12)$$

$${}^{t+\Delta t-\alpha_f}\mathbf{u} = (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + \alpha_f {}^t\mathbf{u}, \quad (13)$$

$${}^{t+\Delta t-\alpha_f}\mathbf{F}_{\text{int}} = (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} + \alpha_f {}^t\mathbf{F}_{\text{int}}, \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t-\alpha_f}\mathbf{F}_{\text{ext}} = (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} + \alpha_f {}^t\mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (15)$$

sendo  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$  parâmetros de ponderação pré-determinados, que descrevem a dissipação numérica. Este parâmetro dissipa as forças inerciais e aquele trata do vetor de carregamento externo, da energia de deformação e das perdas de energia ocasionadas pelo amortecimento. O vetor de carga efetiva ( $\mathbf{F}_{\text{ef}}$ ) na interação  $(k + 1)$  e no tempo  $t + \Delta t$  é dado por:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k+1)} &= (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(k)} + (1 - \alpha_m)\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} - (1 - \alpha_m){}^{t+\Delta t}\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s \\ &+ (1 - \alpha_f)\frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} + (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s \\ &- (1 - \alpha_f)\gamma \Delta t {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s - (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - \alpha_f {}^t\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ &+ \alpha_m {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_f {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^t\dot{\mathbf{u}} + \alpha_f {}^t\mathbf{F}_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (16)$$

na qual os vetores  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$  são determinados de acordo com as equações:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s = \frac{{}^t\mathbf{u}}{\beta \Delta t^2} + \frac{{}^t\dot{\mathbf{u}}}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}}. \quad (18)$$

A matriz de rigidez efetiva ( $\mathbf{K}_{\text{ef}}$ ) é determinada pela expressão:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k+1)} = (1 - \alpha_m)\frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} + (1 - \alpha_f)\frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} + (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k)}. \quad (19)$$

O método  $\alpha$ -Generalizado é incondicionalmente estável e apresenta precisão de ordem dois. Além disso, permite uma máxima dissipação de altas frequências e mínima dissipação de baixas frequências para os parâmetros:

$$\gamma = 0,5 - \alpha_m + \alpha_f, \quad (20)$$

$$\beta = 0,25 (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2. \quad (21)$$

A dissipação de baixa frequência é minimizada quando:

$$\alpha_f = \frac{\alpha_m + 1}{3}, \quad (22)$$

em que  $\alpha_m \in [-1,0]$  e  $\alpha_f \in [0,1/3]$ . Destaca-se que para  $\alpha_f = 0$  implica no método WBZ- $\alpha$  e para  $\alpha_m = 0$ , no método HHT- $\alpha$ . Se  $\alpha_f = \alpha_m = 0$ , reduz-se ao método de Newmark (1959).

## 2.4 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DO ELEMENTO DE VIGA-PILAR



O elemento finito de viga-pilar tem dois nós e três graus de liberdade por nó. Na teoria de viga de Euler-Bernoulli, assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma antes e após a aplicação do carregamento.

As coordenadas dos nós "1" e "2" do elemento no sistema global na configuração inicial são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento inicial (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela seguinte equação (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (23)$$

Para o elemento de viga na sua configuração corrente, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó "1" e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó "2", em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e  $v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , sendo  $i = 1, 2$ . O comprimento deformado  $L$  do elemento é (YAW, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (24)$$

O vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{p}$  do elemento finito  $m$  é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T. \quad (25)$$

O deslocamento axial local ( $u_l$ ) do elemento é calculado por:

$$u_l = L - L_0. \quad (26)$$

Assume-se que a deformação específica  $\varepsilon$  é constante, a qual é determinada por  $\varepsilon = u_l/L_0$ . A força axial  $N$  da barra é, então, avaliada conforme a equação:

$$N = \frac{EA\bar{u}}{L_0}, \quad (27)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga-pilar ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) da seguinte forma (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

em que  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{11} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1} \right), \quad (29)$$

$$\theta_{21} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2} \right), \quad (30)$$

sendo  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas a partir do sistema de equações globais. As expressões para o ângulo inicial  $\beta_0$  e o para o ângulo corrente  $\beta$  da barra são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right), \quad (31)$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1} \right). \quad (32)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , dada pela seguinte equação (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad (33)$$

na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad (34)$$



$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{r}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T). \quad (35)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  na Equação (34) é a matriz constitutiva dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

em que  $r = \sqrt{I/A}$  é o raio de giração, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad (37)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T, \quad (38)$$

e a matriz  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  nas Equações (37), (38) e (39), são descritas por, respectivamente:

$$s = \text{sen}(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}, \quad (40)$$

$$c = \text{cos}(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}. \quad (41)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T \quad (42)$$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, um exemplo numérico de uma viga biengastada sujeita a uma carga dinâmica, estudada por Yang e Saigal (1984) e Silva (2009), é apresentado com o propósito de aplicar e comparar as respostas não lineares dinâmicas obtidas pelos métodos implícitos de Newmark, WBZ- $\alpha$ , HHT- $\alpha$ ,  $\alpha$ -Generalizado e Liu, Li e Zhao (2013). Os valores dos parâmetros inerentes a cada método são considerados conforme a Tabela 1.

A análise transiente tem por objetivo avaliar a resposta de uma estrutura submetida à ação de um carregamento qualquer variável ao longo do tempo. Nos problemas dependentes do tempo, a resposta do sistema, sujeito a condições iniciais de deslocamentos, velocidades e acelerações, bem como à ação de carregamentos dependentes do tempo, é calculada em um intervalo de tempo definido. Ao discretizar o sistema por meio da formulação corrotacional do MEF, a resposta transiente é obtida resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias dado pela Equação (1).

**Tabela 1:** Valores dos parâmetros inerentes a cada método

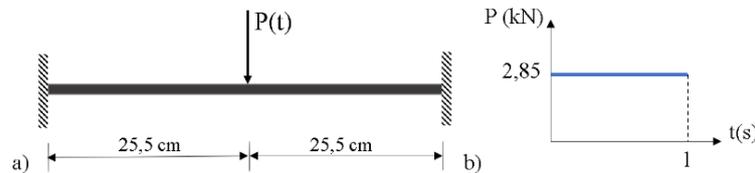
Método de Solução	Parâmetros
Newmark	$\alpha_m = \alpha_f = 0$
WBZ- $\alpha$	$\alpha_m = -1$ e $\alpha_f = 0$
HHT- $\alpha$	$\alpha_m = 0$ e $\alpha_f = 1/3$
$\alpha$ -Generalizado	$\alpha_m = -1/2$ e $\alpha_f = 1/6$
Liu et al. (2013)	-

Fonte: O Autor

Considere a viga biengastada ilustrada na Figura 1 com 51 cm de comprimento e seção transversal retangular com área  $A = 0,806 \text{ cm}^2$  e momento de inércia  $I = 6,77 \times 10^{-3} \text{ cm}^4$ . O módulo de elasticidade  $E$  e a densidade  $\rho$  são adotados iguais a 206,84 GPa e



$2,7786 \times 10^3 \text{ N s}^2/\text{m}^4$ , respectivamente. Uma carga  $P = 2,85 \text{ kN}$  é aplicada na estrutura durante  $1,0 \text{ s}$  e o deslocamento vertical no centro da viga (ponto de aplicação da força) é controlado durante  $0,005 \text{ s}$ . Adotam-se a tolerância para o critério de convergência  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-8}$  e o número máximo de iterações no ciclo iterativo (correção da solução predita)  $k_{\text{máx}} = 200$ . A análise dinâmica é efetuada sem amortecimento, isto é, a matriz de amortecimento  $C = \mathbf{0}$  na Equação (1).



**Figura 1:** Modelo estrutural e carregamento referentes à viga biengastada.  
**Fonte:** O Autor.

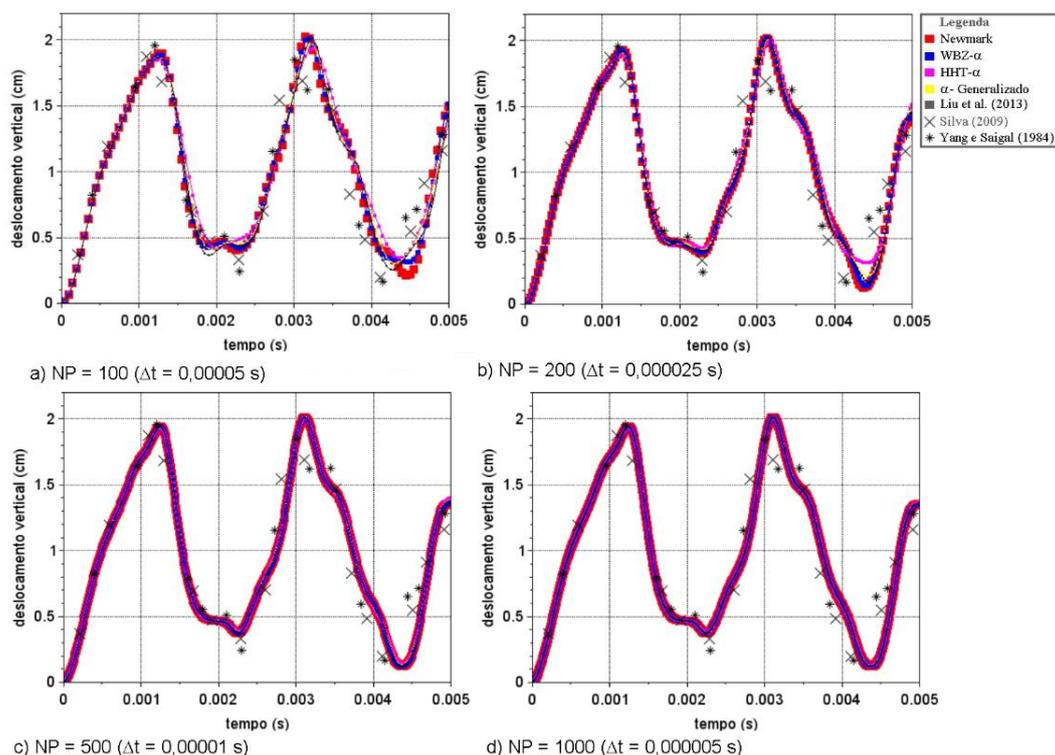
Utiliza-se nas simulações a matriz de massa condensada  $\mathbf{M}$ . Nessa matriz, toda a massa do elemento é transferida diretamente para seus nós, resultando em uma matriz diagonal, sendo representada pela seguinte equação (LE; BATTINI; HJIAJ, 2011):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A L_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_0^2/12 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

em que  $\mathbf{0}_3$  é a matriz nula de ordem 3 e  $\rho$  é a densidade do material.

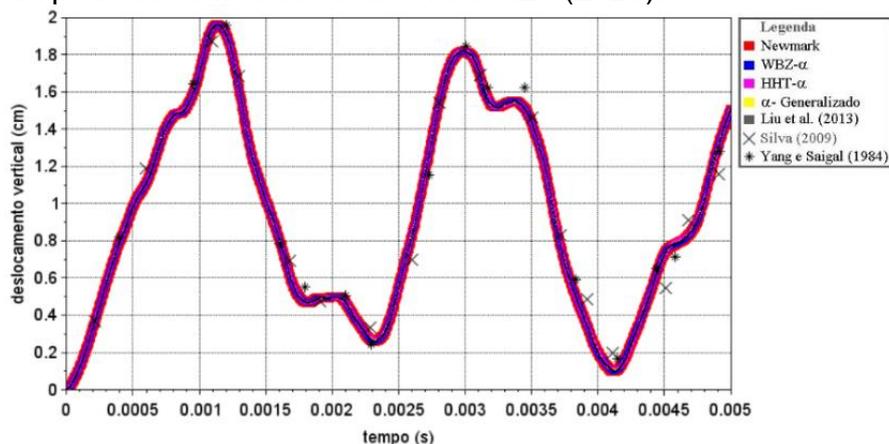
A resposta não linear tempo *versus* deslocamento vertical no centro da viga é apresentada no Gráfico 1, considerando a malha com 10 elementos finitos e diferentes valores para o incremento de tempo  $\Delta t$ . Nota-se, nesse gráfico, que a escolha do tamanho desse incremento no início da análise afeta a qualidade da resposta dinâmica não linear. À proporção que o valor de  $\Delta t$  diminui, as curvas tempo – deslocamento obtidas pelos métodos implementados se aproximam.



**Gráfico 1:** Simulações com 10 elementos finitos variando o valor do incremento de tempo  $\Delta t$ .  
**Fonte:** O Autor.

No Gráfico 2, aparecem as curvas tempo – deslocamento obtidas com os métodos implícitos implementados, considerando a viga discretizada com 60 elementos finitos e o incremento  $\Delta t = 5,0 \times 10^{-6}$  s, havendo razoável concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Silva (2009).

O algoritmo da técnica de integração de Newmark associada ao método de Newton-Raphson padrão pode ser encontrado em Souza (2023).



**Gráfico 2:** Simulações com 60 elementos finitos e incremento de tempo  $\Delta t = 5,0 \times 10^{-6}$  s.  
**Fonte:** O Autor.

## 4 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a formulação de cinco métodos implícitos de integração direta existentes na literatura, em que as relações de equilíbrio são satisfeitas em pontos de tempo discretos  $\Delta t$ . As matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  foram assumidas constantes durante a análise



não linear. Uma formulação corrotacional do MEF foi apresentada para a análise dinâmica geometricamente não linear considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. A solução aproximada foi obtida por meio de sucessivas resoluções de sistemas de equações algébricas lineares utilizando o esquema iterativo de Newton-Raphson padrão.

A partir dos resultados numéricos do problema de uma viga biengastada sujeita a uma carga dinâmica, pôde-se constatar que a escolha do intervalo de tempo é fundamental na análise transiente, visto que está relacionado com os critérios precisão e esforço computacional. O incremento deve ser grande o suficiente para resguardar o custo (tempo de processamento), e pequeno o suficiente para obter a solução precisa. Posto isso, é importante selecionar um incremento de tempo apropriado e que seja capaz de satisfazer esses dois critérios contraditórios.

Os algoritmos implícitos tendem a ser numericamente estáveis, permitindo a consideração de grandes passos de tempo. No entanto, o custo computacional por passo de tempo na análise dinâmica não linear é alto e as exigências de armazenamento tendem a aumentar drasticamente com o tamanho da malha de Elementos Finitos.

Por fim, para a definição do método de integração direta a ser utilizado pelo analista/projetista em simulações estruturais, dois aspectos devem ser considerados na análise dinâmica, quais sejam, a precisão e a estabilidade. Aquele diz respeito à acurácia da resposta numérica, e este tem relação com o comportamento do algoritmo e o acúmulo de erros ao longo de incrementos de tempo.

## REFERÊNCIAS

CHEN, Z.; HE, M.; TAO, Y.; YANG, Y. B. An efficient and robust nonlinear dynamic analysis method for framed structures using the rigid body rule. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 22, n. 03n04, p. 2240001, 2022.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371, 1993.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1991.

DOKAINISH, M. A.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods. **Computers & Structures**, v. 32, n. 6, p. 1371-1386, 1989.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. JR; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 283-292, 1977.

KIM, W. An improved implicit method with dissipation control capability: The simple generalized composite time integration algorithm. **Applied Mathematical Modelling**, v. 81, p. 910-930, 2020.

LAVRENČIČ, M.; BRANK, B. Comparison of numerically dissipative schemes for structural dynamics: generalized-alpha versus energy-decaying methods. **Thin-walled structures**, v. 157, p. 107075, 2020.



LE, T.-N.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. **Computational Mechanics**, v. 48, p. 153-161, 2011.

LIU, T. Y.; LI, Q. B.; ZHAO, C. B. An efficient time-integration method for nonlinear dynamic analysis of solids and structures. **Science China Physics, Mechanics and Astronomy**, v. 56, p. 798-804, 2013.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the engineering mechanics division**, v. 85, n. 3, p. 67-94, 1959.

QU, X.; QI, C.; FU, G.; LI, X. Effects of time integration schemes on discontinuous deformation simulations using the numerical manifold method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 112, n. 11, p. 1614-1635, 2017.

REZAIIEE-PAJAND, M.; ESFEHANI, S. A. H.; KARIMI-RAD, M. Highly accurate family of time integration method. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 67, n. 6, p. 603-616, 2018.

SCILAB, versão 2023.1.0. Dassault Systèmes, 2023.

SILVA, A. R. D. 2009. 322f. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

SOUZA, L. A. F. Análise dinâmica não linear de vigas por meio da formulação corrotacional do MEF. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, v. 15, n. 1, 2023.

THAI, H. T.; NGUYEN, T. K.; LEE, S.; PATEL, V. I.; VO, T. P. Review of nonlinear analysis and modeling of steel and composite structures. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 20, n. 04, p. 2030003, 2020.

VIANA, H. F.; SILVA, R. G. L.; COSTA, R. S.; LAVALL, A. C. C. Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method. **Engineering Structures**, v. 223, p. 111197, 2020.

WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. An alpha modification of Newmark's method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 15, n. 10, p. 1562-1566, 1980.

YANG, T. Y.; SAIGAL, S. A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 20, n. 5, p. 851-867, 1984.

YAW, L. L. **2D Corotational Beam Formulation**. Walla Walla, USA: Walla Walla University, 2009.

ZHANG, H.; XING, Y. A three-parameter single-step time integration method for structural dynamic analysis. **Acta Mechanica Sinica**, v. 35, n. 1, p. 112-128, 2019.



ZHANG, J.; LIU, Y.; LIU, D. Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 109, n. 3, p. 368-406, 2017.