

# APLICAÇÃO DE CRITÉRIOS DE FALHA EM ELEMENTO SÓLIDO TRIDIMENSIONAL ISOTRÓPICO

Claudio Nuernberg Junior<sup>1</sup>; José Luiz Miotto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Acadêmico, Mestrando, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV), Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá (DEC/UEM) – claudionjr@gmail.com

<sup>2</sup>Professor, Doutor, Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá (DEC/UEM) – jlmiotto@uem.br

## RESUMO

Os critérios de falha são imprescindíveis para a prática da engenharia de estruturas, tendo em vista que aproximam os resultados de ensaios laboratoriais das situações reais de utilização dos materiais. A presente pesquisa teve como objetivos a apresentação de diferentes critérios de falha para materiais sólidos e sua aplicação em um exemplo ilustrativo. Foram apresentados os conceitos de ductilidade, fragilidade, elasticidade e plasticidade dos materiais. Em seguida, foram mostrados a representação tensorial do estado de tensões e o conceito de tensões principais. As teorias de falha da Tensão Normal Máxima, da Tensão de Cisalhamento Máxima, da Energia Total de Deformação e da Energia de Distorção foram explicadas de forma sintetizada, sendo introduzido seu equacionamento para o estado geral de tensões e apresentadas suas recomendações de uso. Em seguida, um exemplo de aplicação das quatro teorias foi resolvido, utilizando-se um elemento infinitesimal de aço ASTM A36. Desse modo, foi possível se demonstrar as aplicações das teorias de falha em uma situação próxima da realidade. A Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima se mostrou mais conservadora do que a Teoria da Energia de Deformação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Tensores; Escoamento; Ruptura; Elasticidade; Plasticidade.

## 1 INTRODUÇÃO

Na elaboração do projeto da estrutura de uma edificação, é fundamental que o projetista disponha de uma série de informações sem as quais não é possível se atender aos requisitos de segurança, utilização e economicidades desejados. Entre essas informações se destacam o conhecimento das propriedades mecânicas dos materiais empregados e o estado de tensões a que estarão sujeitos.

Nesse contexto, Ugural e Fenster (1979) definem falha, em termos gerais, como qualquer ação que impossibilite um elemento estrutural de funcionar da maneira desejada. Desse modo, segundo os autores, deformações permanentes, fraturas ou até mesmo deformações elásticas excessivas poderiam ser consideradas modos de falha.

Frequentemente os elementos estruturais, em situações de serviço, estão submetidos a estados de tensões diferentes daqueles analisados nos ensaios de caracterização dos materiais. Nesse caso, o sólido submetido a tensões em duas ou três direções, de acordo com Collins (1993), pode entrar em escoamento, por exemplo, sem que sua tensão de escoamento tenha sido atingida em qualquer uma das direções, uma vez que as tensões atuantes nas outras direções podem influenciar nesse fenômeno. Desse modo, salienta o autor, seria inviável avaliar experimentalmente todas as situações de falha para um sólido submetido a tensões em múltiplas direções.

Diante dessa impossibilidade experimental, diferentes teorias foram propostas, ao longo da história, para se analisar a ação conjunta de tensões atuantes em diferentes direções de um sólido. Assim, estabeleceram-se critérios de falha, associando o estado de tensões de um sólido a uma ou mais propriedades do material de que é composto, obtidas em ensaios laboratoriais, de modo a verificar sua segurança quanto à ocorrência de falha.

O presente trabalho tem como objetivos apresentar alguns dos diferentes critérios de falha existentes, identificando também suas limitações. Além disso, propõe-se a comparar esses critérios por meio de um exemplo ilustrativo de sua aplicação.

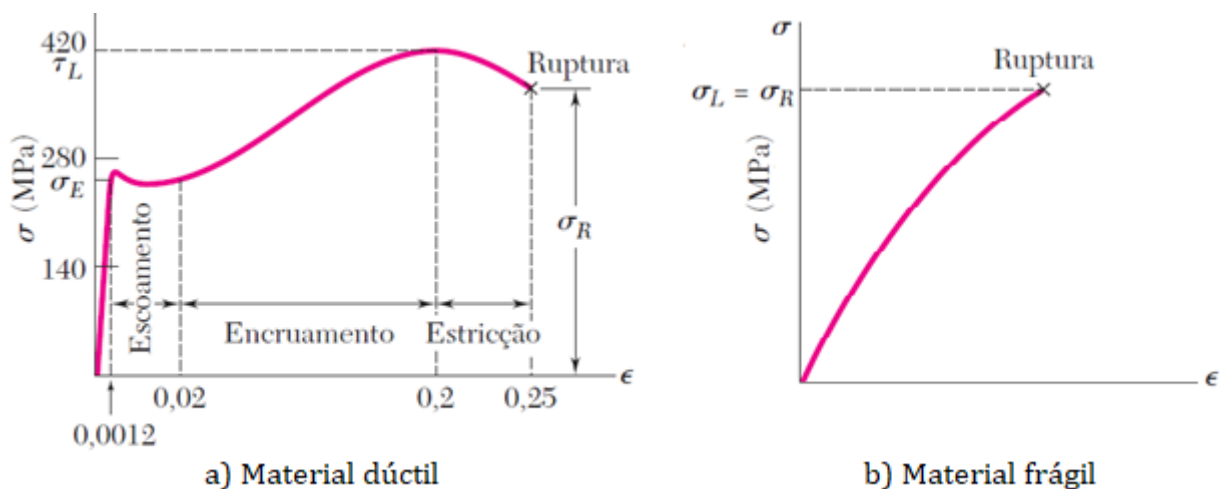
## 2 DESENVOLVIMENTO

Antes de apresentar os critérios de falha, faz-se necessário se introduzir alguns conceitos fundamentais. Nesta sessão são explicados inicialmente os conceitos de elasticidade, plasticidade e tensão de escoamento. Em seguida, trata-se da representação tridimensional das tensões e as tensões principais em um sólido.

### 2.1 RELAÇÕES ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

As relações que explicam o comportamento dos materiais são denominadas relações constitutivas ou modelos reológicos. Segundo Saad (2005), o comportamento mecânico dos sólidos normalmente é definido por relações entre tensões e deformações. Valliappan (1981), por sua vez, afirma que em materiais reais essas relações são complexas, podendo ser influenciadas pelas condições de carregamento, tempo, temperatura e condições ambientais.

Uma das maneiras de se obter e representar as características de tensão e deformação de um material é por meio do diagrama tensão-deformação. De acordo com Beer et al. (2011), esse diagrama é normalmente obtido por meio de um ensaio de tração em uma amostra do material, com resultados que variam conforme o material analisado. Com base nos diagramas de tensão-deformação, é possível, por exemplo, se classificar os materiais como dúcteis ou frágeis. A Figura 1 mostra dois diagramas tensão-deformação, sendo o primeiro correspondente a um material dúctil e o segundo, a um material frágil.



**Figura 1:** Exemplos de diagramas de tensão-deformação: a) Material dúctil, com escoamento antes da ruptura; b) Material frágil, sem escoamento

**Fonte:** adaptado de Beer et al. (2011)

Segundo Hibbeler (2010), os materiais dúcteis são caracterizados por sofrerem grandes deformações diante de pequenos incrementos de força quando submetidos a tensões superiores a um determinado valor ( $\sigma_E$ ), denominado tensão de escoamento, o que é evidenciado na Figura 1a. Vale salientar que nem todos os materiais dúcteis apresentam uma tensão de escoamento bem definida em seus diagramas, embora se observe a ocorrência de escoamento antes da ruptura. Nos materiais dúcteis, conforme Beer et al. (2011), as tensões de cisalhamento são as principais responsáveis pela falha no caso de carregamentos axiais, o que ocorre quando é atingida a tensão  $\sigma_R$ , denominada resistência de ruptura ou tensão última.

Os materiais frágeis, por sua vez, têm como característica apresentarem pouco ou nenhum escoamento antes da falha (HIBBELER, 2010). Ugural e Fenster (1979) explicam que um material é considerado frágil quando sofre até 5% de escoamento antes da ruptura. Nos materiais frágeis, conforme Beer et al. (2011), as tensões normais são as principais responsáveis pela falha. A Figura 1b mostra o diagrama tensão-deformação típico de materiais frágeis, em que se pode observar que a tensão de ruptura  $\sigma_R$  é igual à tensão limite  $\sigma_L$ , ou seja, não ocorre escoamento antes da ruptura.

Os diagramas de tensão-deformação também permitem conhecer o comportamento de um material em termos de plasticidade e elasticidade. Segundo Valliappan (1981), os modelos reológicos elástico e plástico representam idealizações do comportamento dos materiais independentes do tempo de duração da aplicação da carga. De acordo com Beer et al. (2011), um material apresenta comportamento elástico quando as deformações específicas desaparecem ao serem removidas as tensões atuantes. Valliappan (1981) explica que a deformação elástica envolve apenas o alongamento das ligações atômicas, e por isso o trabalho realizado para a deformação pode ser recuperado quando ocorre o descarregamento, possibilitando o retorno do corpo à condição original.

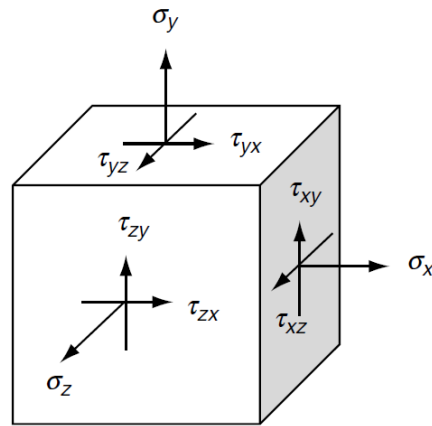
Saad (2005) afirma que muitos materiais estruturais, incluindo metais, plásticos, cerâmicas, madeira, rocha, concreto, entre outros, exibem comportamento elástico linear quando submetidos a pequenas deformações, ou seja, existe uma relação de proporcionalidade entre as tensões aplicadas e suas deformações. Segundo Hibbeler (2010), essa relação de proporcionalidade é expressa pela Lei de Hooke, sendo o Módulo de Elasticidade (E) a grandeza que relaciona as tensões às deformações específicas de um corpo dentro do regime elástico linear. Segundo Beer et al. (2011), para materiais dúcteis que possuem uma tensão de escoamento bem definida, o limite de proporcionalidade praticamente coincide com esse valor, o que por simplificação também é aceito para os materiais dúcteis que não possuem uma tensão de escoamento bem definida, sem que com isso se cometam erros significativos.

Beer et al. (2011) afirmam que, quando as tensões atuantes em qualquer parte de um material excedem o limite de escoamento, seu comportamento passa ao regime plástico, com deformações permanentes e uma relação tensão-deformação não-linear. Segundo Valliappan (1981), as deformações plásticas ocorrem através de mudanças permanentes na posição dos átomos, com o deslizamento entre suas camadas adjacentes.

Valliappan (1981) explica que, no regime plástico, a mudança na estrutura dos átomos continua durante a deformação, de modo que o estado plástico não pode ser definido apenas em termos das tensões e deformações em um determinado momento, havendo a necessidade de se considerar o histórico de carregamentos. Por isso, afirma o autor, a deformação plástica total não pode ser diretamente determinada a partir do estado de tensões. Ainda de acordo com este autor, quando as deformações plásticas de um corpo são muito superiores às elásticas, é comum que se analise o problema como se tivesse apenas natureza plástica. Por outro lado, afirma o autor, quando as deformações elásticas e plásticas têm a mesma ordem de grandeza, os problemas recebem um tratamento elastoplástico, havendo uma interface distinta entre a região elástica e a plástica e sendo somadas as deformações das duas fases.

## 2.2 O ESTADO TRIAXIAL DE TENSÕES

As tensões atuantes em um corpo podem ser decompostas em tensões normais e cisalhantes atuantes em três eixos ortogonais entre si, denominadas componentes de tensão. Essa representação do estado geral de tensões é mostrada na Figura 2.



**Figura 2:** Componentes de tensões atuantes em um elemento sólido

**Fonte:** Saad (2005)

Valliappan (1981) apresenta as componentes de tensão em notação tensorial e explica que o tensor de tensões é simétrico, de modo que as nove tensões atuantes são, na realidade, apenas seis componentes, como é mostrado na Equação 1.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 1})$$

em que:  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são tensões normais atuantes nos planos cujas normais têm direções x, y e z, respectivamente;  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  são tensões cisalhantes atuantes no plano x e com direções y e z, respectivamente;  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{yz}$  são tensões cisalhantes atuantes no plano y e com direções x e z, respectivamente;  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$  são tensões cisalhantes atuantes no plano z e com direções x e y, respectivamente.

Saad (2005) afirma que existe um sistema de eixos, denominados eixos principais, em que as tensões cisalhantes são nulas, de modo que o sólido é submetido apenas a tensões normais. Valliappan (1981) explica que essas tensões normais, chamadas tensões principais, correspondem a valores limites. Em outras palavras, são as tensões normais de maior valor, em módulo, para um determinado tensor de tensões. A Equação 2 mostra o tensor de tensões no caso da ocorrência das tensões principais.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 2})$$

em que:  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais, de modo que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

### 2.3 CRITÉRIOS DE FALHA

O desenvolvimento de critérios de falha permite que seja analisado o comportamento de um determinado elemento estrutural submetido a tensões atuantes em diferentes direções. Valliappan (1981) define como critério de escoamento a combinação crítica de tensões atuantes em um corpo submetido a carregamentos em diferentes direções. Em outras palavras, os critérios de falha servem para estabelecer limites para

as tensões a que os elementos estruturais podem estar submetidos, quando se analisa a atuação dos esforços em mais de uma direção, a fim de se garantir a não ocorrência de falha.

Ugural e Fenster (1978) explicam que, no caso de materiais frágeis, a ruptura é determinada por meio da resistência última. Segundo os autores, as teorias de falha por escoamento que envolvem a Lei de Hooke podem ser convertidas, de modo a poderem ser utilizadas para materiais frágeis, realizando-se a substituição das tensões de escoamento por tensões últimas em sua formulação.

Nesta sessão são apresentadas algumas das teorias de falha propostas ao longo da história para materiais sólidos.

### 2.3.1 Teoria da Tensão Normal Máxima (Rankine)

De acordo com Mendelson (1970), esta teoria considera que o escoamento ocorre quando qualquer uma das tensões principais atinge a tensão de escoamento de tração ou de compressão. Beer et al. (2011) apresentam esta teoria para materiais frágeis, de modo a considerar como limitantes as tensões axiais de ruptura do material, e não de escoamento.

Collins (1993) afirma que a falha, segundo esta teoria, ocorre se:

$$\sigma_1 \geq \sigma_t, \text{ se } \sigma_1 > 0 \quad (\text{Equação 3})$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_t, \text{ se } \sigma_2 > 0 \quad (\text{Equação 4})$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_t, \text{ se } \sigma_3 > 0 \quad (\text{Equação 5})$$

$$\sigma_1 \leq \sigma_c, \text{ se } \sigma_1 < 0 \quad (\text{Equação 6})$$

$$\sigma_2 \leq \sigma_c, \text{ se } \sigma_2 < 0 \quad (\text{Equação 7})$$

$$\sigma_3 \leq \sigma_c, \text{ se } \sigma_3 < 0 \quad (\text{Equação 8})$$

em que:  $\sigma_t$  é a tensão normal que provoca a falha no material por tração no caso do ensaio axial;  $\sigma_c$  é a tensão normal que provoca a falha no material por compressão no caso do ensaio axial;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido.

A representação gráfica tridimensional dos limites da Teoria da Tensão Normal Máxima é mostrada na Figura 3. No interior da superfície formada, as tensões atuantes são inferiores aos limites apresentados pela teoria, não havendo risco de falha no elemento estrutural sujeito a esse estado de tensões.

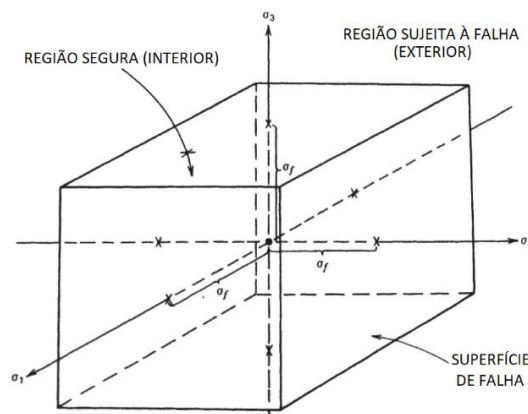


Figura 3: Superfície de falha de acordo com a Teoria da Tensão Normal Máxima

Fonte: adaptado de Collins (1993)

Collins (1993) salienta que a superfície apresentada na Figura 3 teria seu ponto central deslocado caso as tensões limitantes de compressão e de tração do material analisado fossem diferentes.

Ugural e Fenster (1978) afirmam que a Teoria da Tensão Normal Máxima é pouco eficiente para tratar de materiais dúcteis, tendo em vista que o escoamento está associado às tensões cisalhantes. Outro problema apresentado pelos autores é que esta teoria é demasiadamente conservadora quanto à ocorrência de falha em materiais submetidos a tensões de compressão de mesma intensidade em todas as direções (tensões hidrostáticas), tendo em vista que nessa situação sua resistência, na prática, é bastante superior à obtida pelo ensaio axial.

Collins (1993) aponta que, apesar de ser conservadora para alguns estados de tensão, a Teoria da Tensão Normal Máxima é possivelmente a melhor das teorias de falha para materiais frágeis, especialmente em se tratando de materiais isotrópicos.

### 2.3.2 Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima (Tresca-Guest)

De acordo com Mendelson (1970), esta teoria considera que o escoamento ocorre quando a máxima tensão de cisalhamento de um sólido no estado multiaxial de tensões atinge o valor da máxima tensão de cisalhamento que ocorre na situação de tração axial.

Collins (1993) apresenta o seguinte equacionamento:

$$\tau_f = \frac{\sigma_f}{2} \quad (\text{Equação 9})$$

em que:  $\sigma_f$  é a tensão normal que provoca a falha no material no caso do ensaio de tração axial;  $\tau_f$  é a tensão de cisalhamento correspondente a essa tensão axial.

Collins (1993) afirma que a falha, segundo esta teoria, ocorre se:

$$|\tau_1| \geq |\tau_f| \quad (\text{Equação 10})$$

$$|\tau_2| \geq |\tau_f| \quad (\text{Equação 11})$$

$$|\tau_3| \geq |\tau_f| \quad (\text{Equação 12})$$

em que:  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_3$  são tensões de cisalhamento atuantes no sólido e correspondentes, respectivamente, às tensões normais principais atuantes no sólido,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ;  $\tau_f$  é a tensão de cisalhamento correspondente à tensão normal  $\sigma_f$ .

Ainda segundo Collins (1993), a falha prevista por esta teoria ocorre se:

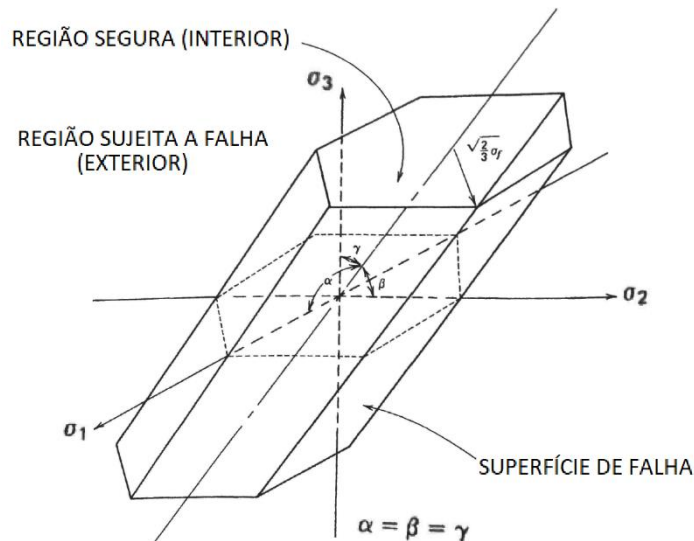
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq |\sigma_f| \quad (\text{Equação 13})$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \geq |\sigma_f| \quad (\text{Equação 14})$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \geq |\sigma_f| \quad (\text{Equação 15})$$

em que:  $\sigma_f$  é a tensão normal que provoca a falha no material no caso do ensaio axial;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido.

Segundo Beer et al. (2011), esse critério se baseia na observação de que o escoamento em materiais dúcteis é provocado principalmente pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas, que ocorre principalmente pelas tensões de cisalhamento. A representação gráfica tridimensional dos limites da Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima é mostrada na Figura 4.



**Figura 4:** Superfície de falha de acordo com a Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima  
**Fonte:** adaptado de Collins (1993)

Collins (1993) afirma que essa teoria é adequada para a previsão do comportamento de materiais dúcteis. Segundo o autor, a teoria também apresenta bons resultados como critério de falha para materiais isotrópicos de ruptura frágil.

### 2.3.3 Teoria da Energia Total de Deformação (Beltrami)

De acordo com Mendelson (1970), essa teoria considera que o escoamento ocorre quando a energia total de deformação por unidade de volume atinge o mesmo valor da energia total de deformação por unidade de volume observada no ponto de escoamento, seja por tração ou por compressão.

Collins (1993) afirma que a falha, segundo esta teoria, ocorre se:

$$u_T \geq u_{Tf} \quad \text{(Equação 16)}$$

em que:  $u_T$  é a energia de deformação por volume unitário armazenada como resultado das tensões atuantes nas diferentes direções;  $u_{Tf}$  é a energia de deformação por volume unitário armazenada como resultado da tensão que provoca falha no material no ensaio axial.

Collins (1993) apresenta o equacionamento para a determinação de  $u_T$  e, em seguida, sua simplificação, para o caso de materiais isotrópicos e de comportamento elástico-linear:

$$u_T = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3] \quad \text{(Equação 17)}$$

$$u_T = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad \text{(Equação 18)}$$

em que:  $u_T$  é a energia de deformação por volume unitário armazenada como resultado das tensões atuantes nas diferentes direções;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são as deformações específicas resultantes da ação das tensões principais;  $\nu$  é o Coeficiente de Poisson do material;  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material.

Collins (1993) apresenta, em seguida, a equação para a determinação de  $u_{Tf}$ , que nada mais é do que um caso específico da Equação 18.

$$u_{Tf} = \frac{1}{2E} [\sigma_f^2] \quad (\text{Equação 19})$$

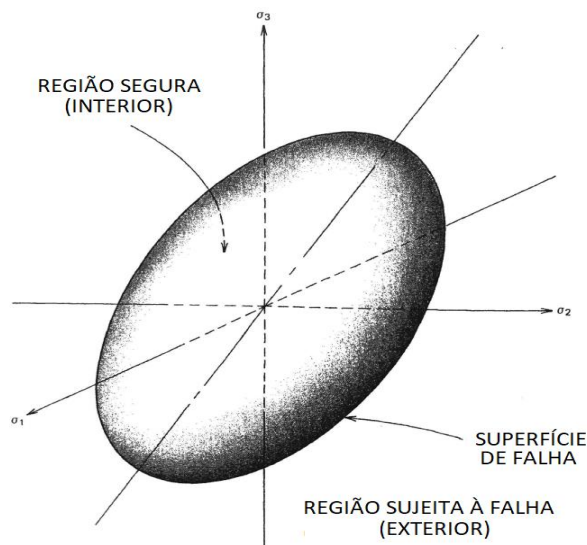
em que:  $u_{Tf}$  é a energia de deformação por volume unitário armazenada como resultado da tensão que provoca falha no material no ensaio axial;  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material;  $\sigma_f$  é a tensão normal que provoca a falha no material no caso do ensaio axial.

Por meio da desigualdade apresentada na Equação 16, Collins (1993) apresenta a equação que define a Teoria da Energia Total de Deformação em termos de tensões, de modo que a falha ocorre se:

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \geq \sigma_f^2 \quad (\text{Equação 20})$$

em que:  $\sigma_f$  é a tensão normal que provoca a falha no material no caso do ensaio axial;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido;  $\nu$  é o Coeficiente de Poisson do material.

A representação gráfica tridimensional dos limites da Teoria da Energia Total de Deformação é mostrada na Figura 5.



**Figura 5:** Superfície de falha de acordo com a Teoria da Energia Total de Deformação  
**Fonte:** adaptado de Collins (1993)

Collins (1993) afirma que essa teoria é válida apenas para o comportamento na região linear-elástica dos materiais. O autor salienta ainda que, a exemplo da Teoria da Tensão Normal Máxima, a Teoria da Energia Total de Deformação é demasiadamente conservadora ao se analisar materiais submetidos a tensões hidrostáticas. Segundo Ugural e Fenster (1978), essa teoria apresenta resultados bastante realistas para materiais dúcteis e tensões planares.

### 2.3.4 Teoria da Energia de Distorção (von Mises)

De acordo com Mendelson (1970), esta teoria considera que o escoamento se inicia quando a energia de distorção atinge o mesmo valor que a energia de distorção



observada no ponto de escoamento por tração axial. Collins (1993) afirma que esta teoria foi desenvolvida diante da constatação experimental de que a parte da energia total de deformação associada às tensões hidrostáticas, responsável por alterações de volume no sólido, e não em sua forma, não contribui significativamente para a falha dos materiais. O autor afirma que a parcela responsável pela mudança na forma do sólido, denominada energia de distorção, é a grande responsável pela falha, especialmente em materiais dúcteis.

Desse modo, a falha, segundo esta teoria, ocorre se:

$$u_d \geq u_{df} \quad (\text{Equação 21})$$

em que:  $u_d$  é a energia de distorção por volume unitário armazenada como resultado das tensões atuantes nas diferentes direções;  $u_{df}$  é a energia de distorção por volume unitário armazenada como resultado da tensão que provoca falha no material no ensaio axial.

Collins (1993) apresenta o equacionamento para a determinação de  $u_d$  a partir da energia de deformação total  $u_T$ , já apresentada na Equação 17 e omitida nesta sessão:

$$u_d = u_T - u_V \quad (\text{Equação 22})$$

$$u_V = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right]^2 \quad (\text{Equação 23})$$

$$u_d = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+\nu}{3E} \right] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (\text{Equação 24})$$

em que:  $u_d$  é a energia de distorção por volume unitário;  $u_T$  é a energia total de deformação por volume unitário;  $u_V$  é a energia de deformação volumétrica por volume unitário;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido;  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  são as deformações específicas resultantes da ação das tensões principais;  $\nu$  é o Coeficiente de Poisson do material;  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material.

Collins (1993) apresenta, em seguida, a equação para a determinação de  $u_{df}$ , que nada mais é do que um caso específico da Equação 24.

$$u_{df} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2 \quad (\text{Equação 25})$$

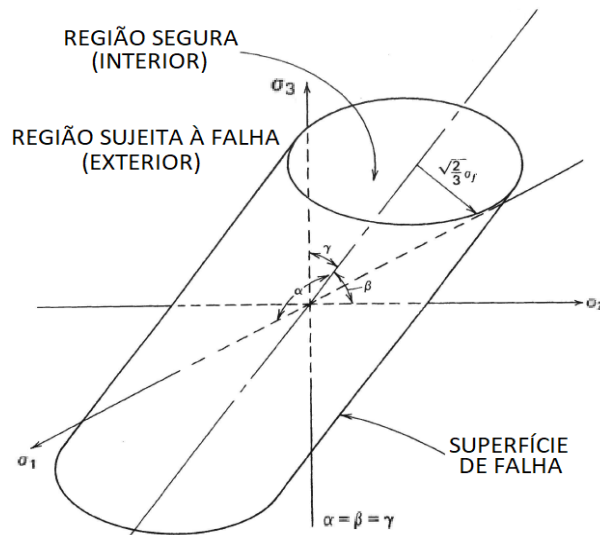
em que:  $u_{df}$  é a energia de distorção por volume unitário armazenada como resultado da tensão que provoca falha no material no ensaio axial; e as demais variáveis já foram acima definidas.

Por meio da desigualdade apresentada na Equação 21, Collins (1993) obtém a equação que define a Teoria da Energia de Distorção em termos de tensões, de modo que a falha ocorre se:

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \geq \sigma_f^2 \quad (\text{Equação 28})$$

em que:  $\sigma_f$  é a tensão normal que provoca a falha no material no caso do ensaio axial;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais principais atuantes no sólido.

A representação gráfica tridimensional dos limites da Teoria da Energia de Distorção é mostrada na Figura 6.



**Figura 6:** Superfície de falha de acordo com a Teoria da Energia de Distorção  
**Fonte:** adaptado de Collins (1993)

Mendelson (1970) afirma que a Teoria da Energia de Distorção prevê o escoamento por uma tensão de cisalhamento puro cerca de 15% superior à prevista pela Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima. Beer et al. (2011) salientam que, para alguns estados de tensões, as teorias apresentam o mesmo resultado. Collins (1993) afirma que a Teoria da Energia de Distorção é bastante adequada para materiais isotrópicos cuja falha se dá por escoamento ou ruptura dúctil. Beer et al. (2011) afirmam que a Teoria da Energia de Distorção parece ser mais precisa do que a Teoria de Cisalhamento Máxima na previsão de falha por escoamento de um material submetido à torção.

## 2.4 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta sessão é apresentado um exemplo de aplicação das teorias de falha. Analisou-se um elemento sólido de aço ASTM A36, um material dúctil, e o estado de tensões corresponde às tensões principais.

Hibbeler (2010) traz as propriedades mecânicas do aço ASTM A36. Em uma adaptação para o sistema internacional de unidades, tem-se que a tensão de escoamento à compressão ( $\sigma_{E,c}$ ), de -250 MPa, coincide, em módulo, com a tensão de escoamento à tração ( $\sigma_{E,t}$ ), de 250 MPa. O autor afirma ainda que o Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) para esse material é igual a 0,32. Trata-se de um material isotrópico.

Foram adotadas como tensões principais:

$$\sigma_1 = 180 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 200 \text{ MPa}$$

### Pela Teoria da Tensão Normal Máxima:

$$\sigma_1 = 180 < \sigma_{E,t} = 250$$

$$\sigma_2 = -55 > \sigma_{E,c} = -250$$

$$\sigma_3 = 200 < \sigma_{E,t} = 250$$

Logo, de acordo com esse critério, o elemento estrutural estaria seguro.

### Pela Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima:

$$\sigma_f = \sigma_{E,t} = 250 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 235 < \sigma_f = 250$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = 255 > \sigma_f = 250$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = 20 < \sigma_f = 250$$

Logo, de acordo com esse critério, o elemento estrutural não estaria seguro, tendo em vista que a diferença entre  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , de 255 MPa, é superior à tensão de falha, de 250 MPa. Haveria, portanto, a falha do material.

#### Pela Teoria da Energia Total de Deformação:

$$\sigma_f = \sigma_{E,t} = 250 \text{ MPa}$$

$$[180^2 + (-55)^2 + 200^2 - 2 * 0,32(200 * (-55) + (-55) * 200 + 180 * 200)] = 65761 > \sigma_f^2 = 62500$$

Logo, de acordo com esse critério, o elemento estrutural não estaria dentro do limite de segurança, tendo em vista que a energia total de deformação por volume, para esse estado de tensões apresentado, é superior à energia total de deformação por volume para o caso do ensaio de tração axial. Haveria, portanto, falha do material.

#### Pela Teoria da Energia de Distorção:

$$\sigma_f = \sigma_{E,t} = 250 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{2} [(180 - (-55))^2 + (-55 - 200)^2 + (180 - 200)^2] = 60325 < \sigma_f^2 = 62500$$

Logo, de acordo com esse critério, o elemento estrutural estaria dentro do limite de segurança.

À exceção da Teoria da Tensão Normal Máxima, todos os demais critérios se mostrariam adequados para o material analisado, tendo em vista o comportamento dúctil e isotrópico do Aço ASTM 36.

Comparando-se as quatro teorias de falha apresentadas na revisão bibliográfica, percebe-se que, no caso do exemplo de aplicação, as teorias da Tensão de Cisalhamento Máxima e da Energia Total de Deformação se mostraram mais conservadoras.

É interessante se analisar que nenhuma das tensões principais, individualmente, supera a tensão de escoamento do material, como ficou claro nas verificações da Teoria da Tensão Normal Máxima. Entretanto, a depender das teorias de falha adotadas, o elemento analisado não estaria em segurança. Assim, percebe-se que o dimensionamento de um elemento estrutural com base apenas em sua tensão de escoamento pode, em algumas situações, conduzir a resultados inseguros.

Deve-se ressaltar ainda que, para o exemplo analisado, a teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima se mostrou mais conservadora do que a Teoria da Energia de Distorção. Esse resultado é condizente com o texto de Mendelson (1970), ainda que a diferença de 15% não tenha sido constatada.

### 3 CONCLUSÃO

O referencial teórico apresentado permitiu uma melhor interpretação das formulações dos critérios de falha. Também tornou possível o desenvolvimento de um exemplo de aplicação, analisado de modo a permitir a comparação entre as quatro teorias apresentadas e a ressaltar a importância do conhecimento dos critérios de falha. Para o exemplo resolvido, as teorias da Tensão de Cisalhamento Máxima e da Energia Total de Deformação se mostraram mais conservadoras que as teorias da Tensão Normal Máxima e da Energia de Distorção.

## REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Nova York: AMGH, 2011.

COLLINS, J. A. **Failure of Materials in Mechanical Design – Analysis, Prediction, Prevention**. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1993.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Person, 2010.

MENDELSON, A. **Plasticity: Theory and Applications**. 2. ed. Nova York: The Macmillan Company, 1970.

SAAD, M. H. **Elasticity – Theory, Applications and Numerics**. Oxford: Elsevier, 2005.

UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. Nova York: Elsevier, 1978.

VALLIAPPAN, S. **Continuum Mechanics Fundamentals**. Rotterdam: A. A. Balkema, 1981.